Roll No. ....

Total No. of Questions : 9] [Total No. of Printed Pages : 8

(2033)

UG (CBCS) IIIrd Year Annual Examination

3403

B.A./B.Sc. MATHEMATICS

(Linear Algebra)

(DSE-3A.3)

Paper : MATH303TH

Time : 3 Hours] [Maximum Marks : 70

Note :– Q. No. **1** in Section–A is compulsory. In Section–B attempt *one* question each from the Units–I, II, III and IV. Marks are written against each question.

खण्ड–अ में प्रश्न संख्या 1 अनिवार्य है। खण्ड–ब की प्रत्येक इकाई I, II, III व IV से एक-एक प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने लिखे गए हैं।

Section–A (खण्ड–अ)

Compulsory Question (अनिवार्य प्रश्न)

1. (i) Define a Vector Space.

एक सदिश अन्तराल को परिभाषित कीजिए।

(ii) Let V be a vector space in R^3 and $W = \{(a, b, c) ; c$ is an integer$\}$ is its subset. Show that W is not a subspace of V.

माना कि R^3 में V एक सदिश अन्तराल है और $W = \{(a, b, c) : c$ एक पूर्णांक है$\}$ इसका उपसमुच्चय है। दर्शाइए कि W, V का उपअन्तराल नहीं है।

(iii) Find condition on a, b, c, so that the vector $v = (a, b, c) \in R^3$ is a linear combination of $v_1 = (2, 1, 0)$, $v_2 = (1, -1, 2)$ and $v_3 = (0, 3, -4)$.

a, b, c के ऊपर शर्त ज्ञात कीजिए, ताकि सदिश $v = (a, b, c) \in R^3$; $v_1 = (2, 1, 0)$, $v_2 = (1, -1, 2)$ और $v_3 = (0, 3, -4)$ का एक रैखिक संयोजन है।

(iv) Show that the vectors $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$, $(2, -1, 1)$ of R^3 form a basis of $R^3(R)$.

दर्शाइए कि R^3 के सदिश $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$, $(2, -1, 1)$, $R^3(R)$ का आधार बनाते हैं।

(v) Describe explicitly the linear transformation $T : R^2 \to R^2$, such that $T(2, 3) = (4, 5)$ and $T(1, 0) = (0, 0)$.

रैखिक रूपांतरण $T : R^2 \to R^2$ का स्पष्टतया वर्णन कीजिए, जबकि $T(2, 3) = (4, 5)$ और $T(1, 0) = (0, 0)$ हैं।

(vi) If $T_1 : V \rightarrow W$ and $T_2 : V \rightarrow W$ are two linear transformations, then prove that

$\rho(T_1 + T_2) = \rho(T_1) + \rho(T_2)$.

यदि $T_1 : V \rightarrow W$ और $T_2 : V \rightarrow W$ दो रैखिक रूपांतरण हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$\rho(T_1 + T_2) = \rho(T_1) + \rho(T_2)$ हैं।

(vii) Show that the linear transformation $T : R^3 \rightarrow R^2$ defined by $T(x, y, z) = (x - y, y - z)$ is not one-one.

दर्शाइए कि $T(x, y, z) = (x - y, y - z)$ द्वारा परिभाषित रैखिक रूपांतरण $T : R^3 \rightarrow R^2$ वन-वन नहीं है।

(viii) What do you mean by Dual-space and Dual-basis ?

द्वैध अन्तराल व द्वैध-आधार से आपका क्या अभिप्राय है ?

2×8=16

Section–B (खण्ड–ब)

Unit–I (इकाई–I)

2. (a) Show that the set of all matrices of the form $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, where $a, b \in C$ is a vector space over C, under matrix addition and scalar multiplication.

दर्शाइए कि $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ की तरह के सभी आव्यूहों का समुच्चय, जहाँ $a, b \in C$ योग तथा अदिश गुणन के अन्तर्गत C पर एक सदिश अन्तराल है।

(b) Prove that a non-empty subset W of a vector space V(F) is a subspace of V iff :

(i) $x + y \in W, \forall x, y \in W$

(ii) $\alpha x \in W; \forall x \in W, \alpha \in F$

सिद्ध कीजिए कि सदिश अन्तराल V(F) का एक अरिक्त उपसमुच्चय W, V का उपअन्तराल है यदि और केवल यदि :

(i) $x + y \in W, \forall x, y \in W$

(ii) $\alpha x \in W; \forall x \in W, \alpha \in F$

है। 7,6½

3. (a) Let W be a subspace of the vector space V(F) and $v_1, v_2 \in V$, prove that $v_1 + W = v_2 + W$ iff $v_1 - v_2 \in W$.

माना कि W सदिश अन्तराल V(F) का एक उपअन्तराल है और $v_1, v_2 \in V$, तो सिद्ध कीजिए कि $v_1 + W = v_2 + W$ यदि और केवल यदि $v_1 - v_2 \in W$ है।

(b) Show that $W = \{(a, b, c, d) : a + b = 0, c = 2d\}$ is a subspace of the vector space R^4.

दर्शाइए कि $W = \{(a, b, c, d) : a + b = 0, c = 2d\}$ सदिश अन्तराल R^4 का एक उपअन्तराल है। 7,6½

Unit–II (इकाई–II)

4. (a) Let $u = (1, 2, -1)$, $v = (2, -3, 2)$, $w = (4, 1, 3)$ and $x = (-3, 1, 2)$ be vectors in $R^3(R)$. Show that $L(\{u, v\}) \neq L(\{w, x\})$.

माना कि $u = (1, 2, -1)$, $v = (2, -3, 2)$, $w = (4, 1, 3)$ और $x = (-3, 1, 2)$ $R^3(R)$ में सदिश हैं, तो दर्शाइए कि $L(\{u, v\}) \neq L(\{w, x\})$ है।

(b) Let V(F) be a vector space. Prove that the set $\{v_1, v_2, v_3\}$ is linearly dependent iff v_1, v_2 and v_3 are coplanar.

माना कि V(F) एक सदिश अन्तराल है। सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{v_1, v_2, v_3\}$ रैखिक आश्रित है यदि और केवल यदि v_1, v_2 और v_3 समतलीय हैं। 7,6½

5. (a) Show that the set $B = \{v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots, v_n\}$ is a basis of a finite dimensional vector space V(F) iff every $v \in V$ can be uniquely expressed as $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots\ldots + \alpha_n v_n$; $\alpha_i \in F$, $1 \leq i \leq n$.

दर्शाइए कि समुच्चय $B = \{v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots, v_n\}$ एक परिमित आयामी सदिश अन्तराल का आधार है, यदि और केवल यदि प्रत्येक $v \in V$ को विशिष्ट रूप से $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots\ldots + \alpha_n v_n$; $\alpha_i \in F$, $1 \leq i \leq n$ के रूप में व्यक्त किया जा सके।

(b) Show that the vectors (1, 1, 1), (1, 0, 1) and (1, –1, –1) of R^3 form a basis of $R^3(R)$. Also find the coordinate vector of (–3, 5, 7) relative to this basis.

दर्शाइए कि R^3 के सदिश (1, 1, 1), (1, 0, 1) और (1, –1, –1) $R^3(R)$ का आधार बनाते हैं। साथ की इस आधार से संबंधित (–3, 5, 7) के निर्देशांक सदिश ज्ञात कीजिए। 7

Unit–III (इकाई–III)

6. (a) Let V(F) and W(F) be two vector spaces and $T : V \rightarrow W$ is a linear transformation. Prove that range of T is a subspace of W(F).

माना कि V(F) और W(F) दो सदिश अन्तराल हैं और $T : V \rightarrow W$ एक रैखिक रूपांतरण है। सिद्ध कीजिए कि T रेंज W(F) का एक उपअन्तराल है।

(b) Find a linear transformation $T : R^3 \rightarrow R^2$, such that T(1, 1, 1) = (2, 1), T(1, 1, 0) = (2, 1), T(1, 0, 0) = (2, 1).

एक रैखिक रूपांतरण $T : R^3 \rightarrow R^2$ ज्ञात कीजिए, जबकि T(1, 1, 1) = (2, 1), T(1, 1, 0) = (2, 1), T(1, 0, 0) = (2, 1) हैं।

7,(

7. (a) If $T : R^3 \to R^2$, defined by $T(x, y, z) = (x+y, y+z)$ be a linear transformation, verify that : rank T + nullity T = dim. R^3.

यदि $T : R^3 \to R^2$ एक रैखिक रूपांतरण है जो $T(x, y, z) = (x+y, y+z)$ द्वारा परिभाषित है, सत्यापित कीजिए कि रैंक T + नलिटी T = dim. R^3 है।

(b) Let T be a linear operator on R^3 defined by $T(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$. Find the matrix of T relative to the basis $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0) (1, 0, 0)\}$.

माना कि $T(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$ द्वारा परिभाषित R^3 के ऊपर T एक रैखिक ऑपरेटर है। आधार $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0) (1, 0, 0)\}$ के सापेक्ष T का मैट्रिक्स ज्ञात कीजिए। 7,6½

Unit–IV (इकाई–IV)

8. (a) Prove that a linear transformation $T : V \to W$ is non-singular iff the set of images of a linearly independent set is also linearly independent.

सिद्ध कीजिए कि एक रैखिक रूपांतरण $T : V \to W$ नॉन-सिंगुलर है यदि और केवल यदि एक रैखिक स्वतन्त्र समुच्चय के प्रतिबिम्बों का समुच्चय भी रैखिक स्वतन्त्र है।

(b) Let $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ is a basis of the vector space $V_3(R)$, where $v_1 = (1, -2, 3)$, $v_2 = (1, -1, 1)$ and $v_3 = (2, -4, 7)$. Find its dual basis.

यदि $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, सदिश अन्तराल $V_3(R)$ का एक आधार है, जहाँ $v_1 = (1, -2, 3)$, $v_2 = (1, -1, 1)$ और $v_3 = (2, -4, 7)$ हैं। इसका द्वैध आधार ज्ञात कीजिए। 7,6½

(a) Let λ be an eigenvalue of an invertible operator T on a vector space V(F). Prove that λ^{-1} is an eigenvalue of T^{-1}.

माना कि λ, सदिश अन्तराल V(F) पर एक उल्टे ऑपरेटर T का आइगेनमान है। सिद्ध कीजिए कि λ^{-1}, T^{-1} का एक आइगेनमान है।

(b) Find the characteristic and minimal polynomial for the linear operator $T : R^3 \to R^2$, defined by $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$.

$T(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$ द्वारा परिभाषित, रैखिक ऑपरेटर $T : R^3 \to R^2$ के लिए कैरेक्टरिस्टिक और मिनिमल बहुपद ज्ञात कीजिए। 7,6½

Roll No. ....

Total No. of Questions : 9] [Total No. of Printed Pages : 15

(2033)

UG (CBCS) IIIrd Year Annual Examination

3401

B.A./B.Sc. MATHEMATICS

(Matrices)

(DSE-3A.1)

Paper : MATH301TH

Time : 3 Hours] [Maximum Marks : 70

Note :- Attempt *five* questions in all. Section–A (Question No. 1) is compulsory. Attempt *four* questions from Section–B, selecting *one* question each from the Units–I, II, III and IV. Marks are given against each question.

कुल **पाँच** प्रश्नों को हल कीजिए। खण्ड-अ (प्रश्न क्र. 1) अनिवार्य है। प्रत्येक इकाई I, II, III व IV से **एक-एक** प्रश्न का चयन करते हुए खण्ड-ब से **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न के अंक प्रश्नों के सामने दिए गए हैं।

Section–A

(खण्ड–अ)

Compulsory Question

(अनिवार्य प्रश्न)

1. (i) Define idempotent and involuntary matrix.

उदासीन और अनैच्छिक आव्यूह को परिभाषित कीजिए।

(ii) Prove that a real matrix is unitary iff it is orthogonal.

सिद्ध कीजिए कि मूल आव्यूह एकात्मक है यदि और केवल यदि यह आयतीय है।

(iii) Determine the rank of the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

आव्यूह की श्रेणी निर्धारित कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(iv) If A is an n-rowed non-singular matrix, then prove that :

$$\int\left(A^{-1}\right)=\int(A)$$

यदि A एक n-पंक्तिबद्ध अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\int\left(A^{-1}\right)=\int(A)$$

(v) State Sylvester's law of nullity.

सिल्वेस्टर का शून्यता का नियम बताइए।

(vi) Define eigen values and eigen vectors of a matrix.

आव्यूह के अभिलाक्षणिक मान और अभिलाक्षणिक सदिश को परिभाषित कीजिए।

(vii) Prove that the intersection of two subspaces W_1 and W_2 of a vector-space V(F) is also a subspace.

सिद्ध कीजिए कि सदिश समष्टि V(F) की दो उपसमष्टियाँ W_1 और W_2 का प्रतिच्छेद भी एक उपसमष्टि है।

(viii) Let $T : R^2 \to R^2$ be given by

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

then find the matrix associated with this transformation.

मान लीजिए $T : R^2 \to R^2$ निम्न द्वारा दिया गया है :

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

तो इस परिवर्तन से जुड़े मैट्रिक्स को ज्ञात कीजिए।

2×8=16

Section–B

(खण्ड–ब)

Unit–I

(इकाई–I)

2. (a) Show that every square matrix can expressed in one and only one way as P + iQ, where P and Q are Hermitian matrices.

दर्शाइए कि प्रत्येक वर्ग आव्यूह को एक और केवल एक ही तरीके से P + iQ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ P और Q हर्मिशियन आव्यूह हैं।

(b) Using elementary transformations, find the inverse of matrix :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

प्रारम्भिक परिवर्तनों का उपयोग करते हुए, आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

6½,7

3. (a) Reduce the matrix :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

to the normal form and hence determine its rank.

आव्यूह :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

को सामान्य रूप तक कम कीजिए तथा इसकी श्रेणी निर्धारित कीजिए।

(b) Find the value of k such that the system of equations :

$$x + ky + 3z = 0$$

$$4x + 3y + kz = 0$$

$$2x + y + 2z = 0$$

have non-zero solution.

k का मान इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि समीकरणों के निकाय :

$$x + ky + 3z = 0$$

$$4x + 3y + kz = 0$$

$$2x + y + 2z = 0$$

का हल शून्येत्तर हो। 6½,7

Unit–II

(इकाई–II)

4. (a) Reduce the symmetric matrix A to a diagonal form :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

सममित आव्यूह A को विकर्ण रूप तक कम कीजिए :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Diagonalize the matrix :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

आव्यूह :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

को विकर्ण कीजिए। 6½,7

5. (a) Find the invariant points of the transformations defined by :

$$x' = 2x + 1$$

$$y' = 3 - 2y$$

निम्न द्वारा परिभाषित परिवर्तनों के अपरिवर्तनीय बिंदुओं को ज्ञात कीजिए :

$$x' = 2x + 1$$

$$y' = 3 - 2y$$

(b) Examine the consistency of the following equations and if consistent, find the complete solution :

$$x + 2y - z = 3$$

$$3x - y + 2z = 1$$

$$2x - 2y + 3z = 2$$

निम्नलिखित समीकरणों की संगति की जाँच कीजिए और यदि संगत हों, तो पूर्ण हल ज्ञात कीजिए :

$$x + 2y - z = 3$$

$$3x - y + 2z = 1$$

$$2x - 2y + 3z = 2$$

6½,7

Unit–III

(इकाई–III)

6. (a) If W_1 and W_2 are subspaces of V(F), then prove that $W_1 \cup W_2$ is a subspace of V(F) iff either $W_1 \subseteq W_2$ or $W_2 \subseteq W_1$.

यदि W_1 और W_2 , V(F) की उपसमष्टियाँ हैं तो सिद्ध कीजिए कि $W_1 \cup W_2$, V(F) की एक उपसमष्टि है, यदि और केवल यदि दोनों में से कोई एक $W_1 \subseteq W_2$ अथवा $W_2 \subseteq W_1$ हो।

(b) Let R be the field of real numbers and V be the set of all ordered pairs (x, y) where x, y are reals. Define : ....

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V$$

and $\alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, y_1)$ for $\alpha \in R$ and $(x_1, y_1) \in V$.

Show that V is not a vector space under the above defined operations.

मान लीजिए कि R वास्तविक संख्याओं का क्षेत्र है और V सभी आदेशित युग्मों (x, y) का समुच्चय है जहाँ x, y वास्तविक हैं। परिभाषित कीजिए :

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V$$

और $\alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, y_1)$ for $\alpha \in R$ और $(x_1, y_1) \in V$.

दर्शाइए कि उपरोक्त परिभाषित संक्रियाओं के अंतर्गत V एक सदिश समष्टि नहीं है। 6½,7

7. (a) Prove that :

$$B = \{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0)\}$$

is a basis of R^4 and determine the co-ordinate of (2, 3, 4, –1) relative to the ordered basis B.

सिद्ध कीजिए कि :

$$B = \{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0)\}$$

R^4 का एक आधार है और क्रमित आधार B के सापेक्ष (2, 3, 4, –1) का समन्वय निर्धारित कीजिए।

(b) Prove that the linear span L(S) of any subset S of a vector space V(F) is a subspace of V(F).

सिद्ध कीजिए कि सदिश समष्टि V(F) के किसी उपसमुच्चय S का रैखिक विस्तार L(S), V(F) की उपसमष्टि है। 6½,7

Unit–IV

(इकाई–IV)

. (a) Find all the eigen values and eigen vectors of the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

मैट्रिक्स :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

के सभी अभिलाक्षणिक मान और अभिलाक्षणिक सदिश ज्ञात कीजिए।

(b) The reflection about the line $y = x$ is represented by the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

then find the invariant subspaces.

प्रतिबिम्ब मैट्रिक्स :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

द्वारा रेखा $y = x$ के विषय में दर्शाया गया है। अतः अपरिवर्तनीय उपसमष्टियों को ज्ञात कीजिए। 6½,7

9. (a) Find the matrix associated with the transformation of reflection with respect to the line $y = -x$.

रेखा $y = -x$ के सम्बन्ध में प्रतिबिंब में परिवर्तन से जुड़े मैट्रिक्स ज्ञात कीजिए।

(b) Find the image of a point P(2, –3) under a rotation of the plane about the origin through the angle $\theta = 90°$ and $\theta = 45°$ respectively.

क्रमशः कोण $\theta = 90°$ और $\theta = 45°$ के माध्यम से उत्पत्ति के बारे में प्लेन के रोटेशन के तहत एक बिन्दु P(2, –3) की इमेज ज्ञात कीजिए। 6½,7

Roll No. ....

Total No. of Questions : 9] [Total No. of Printed Pages : 8

(2032)

UG (CBCS) IIIrd Year (Annual) Examination

3320

B.A./B.Sc. MATHEMATICS

(Numerical Methods)

(DSE–3B.1)

Paper : MATH304TH

Time : 3 Hours] **[Maximum Marks : 70**

Note :– Section–A is compulsory. Attempt *four* questions from Section–B, selecting *one* each from Units I, II, III and IV. Use of non-scientific/non-programmable calculator is allowed.

खण्ड–अ अनिवार्य है। खण्ड–ब से **चार** प्रश्न कीजिए। प्रत्येक इकाई I, II, III व IV से **एक–एक** प्रश्न कीजिए। नॉन–साइंटिफिक तथा नॉन–प्रोग्रामेबल कैलकुलेटर की अनुमति है।

Section–A (खण्ड–अ)

Compulsory Question (अनिवार्य प्रश्न) 2×8=16

1. (i) Give *two* advantages of Newton-Raphson method.

न्यूटन–राफ्सन विधि के दो लाभ बताइए।

(ii) Explain Bisection Method.

द्विभाजन विधि की व्याख्या कीजिए।

(iii) Define Interpolation.

अंतरवेषण को परिभाषित कीजिए।

(iv) Write Lagrange's interpolation formula.

लैग्रांजे का अंतरवेषण सूत्र लिखिए।

(v) Write Newton's forward difference formula.

न्यूटन का अग्रांतर सूत्र लिखिए।

(vi) Write down the value of first derivative of y at $x = x_n$ using Newton backward difference formula.

न्यूटन के पश्चांतर सूत्र का प्रयोग करते हुए $x = x_n$ पर y के प्रथम व्युत्पन्न का मान लिखिए।

(vii) Solve $\frac{dy}{dx} = -xy^2$; $y = 2$ at $x = 0$ by modified Euler's method to obtain the value of y at $x = 0.1$ with step size 0.1.

पद आकार 0.1 सहित $x = 0.1$ पर y का मान प्राप्त करने के लिए संशोधित यूलर की विधि द्वारा $\frac{dy}{dx} = -xy^2$; $x = 0$ पर $y = 2$ हल कीजिए।

(viii) Construct forward difference table for the following data :

X	1	2	3	4	5
Y	10	16	14	21	18

निम्नलिखित आँकड़ों के लिए अग्रांतर टेबल की रचना कीजिए :

X	1	2	3	4	5
Y	10	16	14	21	18

Section–B (खण्ड–ब)

Unit–I (इकाई–I)

2. (a) Solve $x^3 - x^2 + 1 = 0$ using Newton–Raphson method to find the root which is correct upto 3 decimal places.

जो तीन दशमलव स्थानों तक सही हो, के मूल प्राप्त करने के लिए न्यूटन-राफ्सन विधि के प्रयोग द्वारा $x^3 - x^2 + 1 = 0$ हल कीजिए।

(b) Find a real root of the equation $x^3 - 5x + 3 = 0$ using Regula-Falsi method.

रेगुला–फाल्सी विधि का प्रयोग करते हुए समीकरण $x^3 - 5x + 3 = 0$ के वास्तविक मूल ज्ञात कीजिए। 7,6½

3. (a) Find the root of $f(x) = \sqrt[3]{15}$ using Bisection method.

द्विभाजन विधि के प्रयोग से $f(x) = \sqrt[3]{15}$ का मूल ज्ञात कीजिए।

(b) Solve the following equations using LU decomposition :

$$3x + 2y + 7z = 4$$
$$2x + 3y + z = 5$$
$$3x + 4y + z = 7$$

LU विसंयोजन का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए :

$$3x + 2y + 7z = 4$$
$$2x + 3y + z = 5$$
$$3x + 4y + z = 7$$

7,6½

Unit–II (इकाई–II)

4. (a) Solve the following system of equations using Gauss-Seidel method with initial solution (2, 3, 0) :

$$5x - y + z = 10$$
$$2x + 4y = 12$$
$$x + y + 5z = -1$$

प्रारम्भिक हल (2, 3, 0) सहित गाउस–सिडल विधि से निम्नलिखित समीकरण निकायों को हल कीजिए :

$$5x - y + z = 10$$
$$2x + 4y = 12$$
$$x + y + 5z = -1$$

(b) Find Y(4.25) using the following data :

X	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
Y	9.75	12.45	15.70	19.52	23.75

निम्नलिखित आँकड़ों के प्रयोग से Y(4.25) प्राप्त कीजिए :

X	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
Y	9.75	12.45	15.70	19.52	23.75

7,6½

5. (a) Using Lagrange's interpolation formula find $f(x)$, if $f(0) = -18$, $f(1) = 0$, $f(3) = 0$, $f(5) = -248$, $f(6) = 0$, $f(9) = 13104$

लैग्रांजे अंतर्वेषण सूत्र के प्रयोग से $f(x)$ ज्ञात कीजिए, यदि $f(0) = -18$, $f(1) = 0$, $f(3) = 0$, $f(5) = -248$, $f(6) = 0$, $f(9) = 13104$

(b) Using Newton's divided difference formula find $f(6)$ from the following data :

x	4	5	7	10	11
$f(x)$	48	100	294	900	1210

न्यूटन के विभाजित अंतर सूत्र के प्रयोग से निम्नलिखित आँकड़ों से $f(6)$ ज्ञात कीजिए :

x	4	5	7	10	11
$f(x)$	48	100	294	900	1210

7,6½

Unit–III (इकाई–III)

6. (a) Find $f'(x)$ at $x = 0.1$ from the following data :

x	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	1.10517	1.2214	1.34986	1.49182

निम्न आँकड़ों से $x = 0.1$ पर $f'(x)$ ज्ञात कीजिए :

x	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	1.10517	1.2214	1.34986	1.49182

(b) Using Stirling formula find Y_{35}, given :

$Y_{20} = 512$, $Y_{30} = 439$, $Y_{40} = 346$, $Y_{50} = 243$

स्टर्लिंग सूत्र के प्रयोग से Y_{35} ज्ञात कीजिए, दिया है :

$Y_{20} = 512$, $Y_{30} = 439$, $Y_{40} = 346$, $Y_{50} = 243$ 7,6½

7. (a) Find the value of $\frac{dy}{dx}$ and $\frac{d^2y}{dx^2}$ at X = 10 from the data :

X	10	11	12	13	14
Y	15	12.8	10.6	8.5	6.4

निम्नलिखित आँकड़ों से X = 10 पर $\frac{dy}{dx}$ और $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान ज्ञात कीजिए :

X	10	11	12	13	14
Y	15	12.8	10.6	8.5	6.4

(b) Find the value of $\frac{dy}{dx}$ at X = 4 from the data :

X	1	2	4	8	10
Y	0	1	5	21	27

निम्नलिखित आँकड़ों से X = 4 पर $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए :

X	1	2	4	8	10
Y	0	1	5	21	27

7,6½

Unit–IV (इकाई–IV)

8. (a) Evaluate by Simpson's $\frac{1}{3}$rd Rule $\int_0^2 \frac{1}{1+x^4}\,dx$, taking $n = 8$.

$n = 8$ लेते हुए सिम्पसन के $\frac{1}{3}$rd नियम द्वारा $\int_0^2 \frac{1}{1+x^4}\,dx$ का मूल्यांकन कीजिए।

(b) Find the solution of $\frac{dY}{dX} = X + Y^2$ for X = 1.1, 1.2 and 1.3 given that Y = 1 at X = 1 using Modified Euler's method.

संशोधित यूलर की विधि के प्रयोग से X = 1.1, 1.2 तथा 1.3 के लिए $\frac{dY}{dX} = X + Y^2$ का हल ज्ञात कीजिए, दिया है X = 1 पर Y = 1।

7,6½

9. (a) The following table gives the velocity v of a particle at time t :

t(seconds)	0	2	4	6	8	10	12
v(m/sec)	4	6	16	34	60	94	136

Find the distance moved by the particle in 12 seconds.

निम्नलिखित सारणी समय t पर एक कण का वेग v दर्शाती है :

t(seconds)	0	2	4	6	8	10	12
v(m/sec)	4	6	16	34	60	94	136

12 सेकण्ड में कण द्वारा चली हुई दूरी ज्ञात कीजिए।

(b) Evaluate the integral $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$ by using Trapezoidal rule taking 8 ordinates.

ऑर्डिनेट (तालमेल) 8 लेते हुए ट्रैपेजॉयडल नियम के प्रयोग से समाकल $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$ का मूल्यांकन कीजिए। 7,6½

Roll No. ....

Total No. of Questions : 9] [Total No. of Printed Pages : 8

(2032)

UG (CBCS) IIIrd Year (Annual) Examination

3319

B.A./B.Sc. MATHEMATICS

(Linear Algebra)

(DSE–3A.3)

Paper : MATH303TH

Time : 3 Hours] **[Maximum Marks : 70**

Note :– Attempt *five* questions in all. Section–A (Question No. 1) is compulsory. Attempt *four* questions from Section–B, selecting *one* question each from the Units–I, II, III and IV. Marks are given against questions.

किन्हीं **पाँच** प्रश्नों को हल कीजिए। खण्ड–अ (प्रश्न संख्या 1) अनिवार्य है। खण्ड–ब की प्रत्येक इकाई I, II, III व IV से **एक-एक** प्रश्न चुनते हुए **चार** प्रश्न हल कीजिए। प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।

Section–A (खण्ड–अ)

Compulsory Question (अनिवार्य प्रश्न)

1. (i) Let V be the set of all real valued continuous function defined on [0, 1] such that $f\left(\frac{2}{3}\right)=2$. Show that V is not closed under addition.

मान लीजिए कि [0, 1] पर परिभाषित सभी वास्तविक मान वाले सतत् फलनों का समुच्चय V है इस प्रकार कि $f\left(\frac{2}{3}\right)=2$ । दर्शाइए कि V योग के अन्तर्गत संवृत नहीं है।

(ii) Let V be a vector space in R^3 and $W = \{(a, b, c)/a \leq 0\}$. Examine whether W is a subspace or not.

मान लीजिए कि R^3 में एक सदिश अन्तराल V है तथा $W = \{(a, b, c)/a \leq 0\}$ जाँच कीजिए कि W एक सबस्पेस है या नहीं।

(iii) Let V be the vector space over F. If $S = \{v_1, v_2\}$ is a linear dependent set, then v_1 and v_2 are collinear. Explain it.

माना कि F पर सदिश अन्तराल V है। यदि $S = \{v_1, v_2\}$ एक आश्रित समुच्चय है, तो v_1 और v_2 कोलाइनर हैं। इसकी व्याख्या कीजिए।

(iv) Find the dimension of the subspace W of R^3, where $W = \{(a, b, c)/a = b = c$ and $a, b, c \in R^3\}$.

R^3 के सबस्पेस W का आयाम ज्ञात कीजिए, जहाँ $W = \{(a, b, c)/a = b = c$ तथा $a, b, c \in R^3\}$।

(v) Find the linear transformation $T : R^2 \to R^2$ such that $T(1, 2) = (3, 4)$ and $T(0, 1) = (0, 0)$.

लाइनियर ट्रांसफॉर्मेशन $T : R^2 \to R^2$ ज्ञात कीजिए इस प्रकार कि $T(1, 2) = (3, 4)$ तथा $T(0, 1) = (0, 0)$।

(vi) If V(F) and W(F) be vector spaces and $T : V \to W$ be a linear transformation, then define the rank of T.

यदि V(F) तथा W(F) वेक्टर स्पेश हैं तथा $T : V \to W$ लाइनियर ट्रांसफॉर्मेशन हैं, तो T की कोटि परिभाषित कीजिए।

(vii) Let $T : R^3 \to R^2$ be a linear transformation defined by $T(x, y, z) = (x - y, y - z)$, then show that T is not one-one.

माना कि $T(x, y, z) = (x - y, y - z)$ द्वारा परिभाषित लाइनियर ट्रांसफॉर्मेशन $T : R^3 \to R^2$ हैं, तो दर्शाइए कि T वन-वन नहीं है।

(viii) Prove that zero is an eigenvalue of a $n \times n$ matrix A iff A is singular.

सिद्ध कीजिए कि शून्य $n \times n$ मैट्रिक्स A का एक आइगेन मान है यदि और केवल यदि A सिंगुलर है।

$2 \times 8 = 16$

Section–B (खण्ड–ब)

Unit–I (इकाई–I)

2. (a) Prove that the necessary and sufficient condition for a non-empty subset W of a vector space V(F) to be a subspace of V is that $\alpha x + \beta y \in W$ * $\alpha, \beta \in F$ and $x, y \in W$.

सिद्ध कीजिए कि किसी वेक्टर स्पेस V(F) के रिक्त सबसेट W के लिए V का सब-स्पेस होने के लिए, आवश्यक और पर्याप्त शर्त है कि $\alpha x + \beta y \in W$ * $\alpha, \beta \in F$ तथा $x, y \in W$।

(b) Let $V_3(R) = \{(a, b, c)/a, b, c \in R\}$ be a vector space over R. Show that $W = \{0, b, c)/ b, c \in R\}$ is a subspace of $V_3(R)$.

माना कि R पर $V_3(R) = \{(a, b, c)/a, b, c \in R\}$ एक वेक्टर स्पेस है। दर्शाइए कि $W = \{0, b, c)/b, c \in R\}$, $V_3(R)$ का एक सब-स्पेस है। 6½, 7

3. (a) Express the vector $v = (3, 2, 1)$ as a linear combination of the vectors $v_1 = (2, -1, 0)$, $v_2 = (1, 2, 1)$ and $v_3 = (0, 2, -1)$.

वेक्टर $v_1 = (2, -1, 0)$, $v_2 = (1, 2, 1)$ तथा $v_3 = (0, 2, -1)$ के लाइनियर संयोजन के रूप में वेक्टर $v = (3, 2, 1)$ स्पष्ट कीजिए।

(b) Prove that the sum of two subspaces of a vector space is again a subspace of V.

सिद्ध कीजिए कि एक वेक्टर स्पेस के दो सब-स्पेसों का योग दुबारा V का एक सब-स्पेस है। 6½, 7

Unit–II (इकाई–II)

4. (a) If u, v, w are L.I. vectors in a vector space V(F), then show that the vectors $u + v$, $v + w$ and $w + u$ are L.I.

यदि u, v, w वेक्टर स्पेस V(F) में L.I. वेक्टर हैं तो दर्शाइए कि वेक्टर्स $u + v$, $v + w$ तथा $w + u$ L.I. हैं।

(b) Show that the matrices $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ form a basis of V(R).

दर्शाइए कि मैट्रिक्स $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ तथा $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ का आधार बनाता है। 6½, 7

5. (a) Find a basis and dimension of the subspace W of R^3, where $W = \{(r, s, t)/r - 2s + 3t = 0$ and $r, s, t \in R\}$.

R^3 का सब-स्पेस W का आधार और आयाम ज्ञात कीजिए, जहाँ $W = \{(r, s, t)/r - 2s + 3t = 0$ तथा $r, s, t \in R\}$।

(b) Let W_1 and W_2 be the subspaces of R^4 generated by {(1, 2, 2, –2), (2, 3, 2, –3), (1, 3, 4, –3)} and {(1, 1, 0, –1), (1, 2, 3, 0), (6, 9, 9, –3)} respectively. Find the basis and dimension of (i) W_1 (ii) W_2 and (iii) $W_1 \cap W_2$.

माना कि क्रमशः {(1, 2, 2, –2), (2, 3, 2, –3), (1, 3, 4, –3)} तथा {(1, 1, 0, –1), (1, 2, 3, 0), (6, 9, 9, –3)} द्वारा उत्पन्न R^4 के सब-स्पेस W_1 तथा W_2 हैं। (i) W_1 (ii) W_2 and (iii) $W_1 \cap W_2$ का आधार और आयाम ज्ञात कीजिए। 6½, 7

Unit–III (इकाई–III)

6. (a) Find a linear transformation $T : R^3 \to R^3$ whose range space is generated by (1, 2, 3) and (4, 5, 6).

लाइनियर ट्रांसफॉर्मेशन $T : R^3 \to R^3$ ज्ञात कीजिए जिसकी रेंज स्पेस (1, 2, 3) तथा (4, 5, 6) द्वारा उत्पन्न है।

(b) Let V be a vector space of 2 × 2 matrices over R and $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$. Let $T : V \to V$ be a transformation defined by $T(A) = PA * V$. Find the basis and dimension of null space of T.

माना कि R तथा $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ पर मैट्रिक्स 2 × 2 का वेक्टर स्पेस V है। माना कि $T(A) = PA * V$ द्वारा परिभाषित ट्रांसफॉर्मेशन $T : V \to V$ है। T के शून्य स्पेस का आधार तथा आयाम ज्ञात कीजिए। 6½, 7

7. (a) Show that the L.T., $T : R^3 \to R^2$ defined by $T(x, y, z) = (x, y)$ is onto but not one-one.

दर्शाइए कि $T(x, y, z) = (x, y)$ द्वारा परिभाषित $T : R^3 \to R^2$, L.T. ऑनटू है लेकिन वन-वन नहीं।

(b) Let $T : V_3 \to V_3$ be defined as $T(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$, prove that T is invertible and find T^{-1}.

माना कि $T(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$, के रूप में परिभाषित $T : V_3 \to V_3$ है सिद्ध कीजिए कि T इनवर्टिबल है तथा T^{-1} ज्ञात कीजिए। 6½, 7

Unit–IV (इकाई–IV)

8. (a) Find all the eigenvalues and eigenvectors for the matrix A, where :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

मैट्रिक्स A के लिए सभी आइगेन मान तथा आइगेन वेक्टर ज्ञात कीजिए, जहाँ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) If λ is a characteristic root of a non-singular matrix A, prove that $\frac{|A|}{\lambda}$ is a characteristic root of adj A.

यदि λ नॉन-सिंगुलर मैट्रिक्स A का अभिलाक्षणिक रूट है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{|A|}{\lambda}$, adj A का एक अभिलाक्षणिक रूट है। 6½, 7

9. (a) Find the eigenvalues and eigenvectors for a linear transformation $T(x, y, z) = (x, + y, y + z, -2y - z)$.

लाइनियर ट्रांसफॉर्मेशन $T(x, y, z) = (x, + y, y + z, -2y - z)$ के लिए आइगेन मान तथा आइगेन वेक्टर ज्ञात कीजिए।

(b) Find the dual basis for $B = \{e_1, e_2\}$ of R^2 over R, where $e_1 = (1, 0)$ and $e_2 = (0, 1)$.

R के ऊपर R^2 का $B = \{e_1, e_2\}$ के लिए द्वैध आधार ज्ञात कीजिए जहाँ $e_1 = (1, 0)$ तथा $e_2 = (0, 1)$। 6½, 7

Roll No. ....

Total No. of Questions : 9] [Total No. of Printed Pages : 8

(2033)

UG (CBCS) IInd Year Annual Examination

3185

B.A./B.Sc. MATHEMATICS

(Integral Calculus)

(SEC-1)

Paper : MATH309TH

Time : 3 Hours] **[Maximum Marks : 70**

Note :– Attempt *five* questions in all, selecting *one* question from each of the Units I, II, III and IV of Section–B. Section–A (Q. No. 1) is compulsory.

कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। खण्ड–ब की प्रत्येक इकाई I, II, III तथा IV से **एक–एक** प्रश्न का उत्तर दीजिए। खण्ड–अ (प्रश्न संख्या 1) अनिवार्य है।

Section–A (खण्ड–अ)

Compulsory Question (अनिवार्य प्रश्न)

1. (i) Show that :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

if $f(x)$ is an odd function of x.

दर्शाइए कि :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

यदि $f(x)$, x का विषम फलन है।

(ii) Give the statement of fundamental theorem of calculus.

कलन की मूलभूत प्रमेय का विवरण दीजिए।

(iii) If $G'(x) = g(x)$, then :

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x).G(x) - \text{..........}$$

यदि $G'(x) = g(x)$ है, तो :

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x).G(x) - \text{..........}$$

(iv) Prove that :

$$\int \sec x\,dx = \log|\sec x + \tan x| + C$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\int \sec x\,dx = \log|\sec x + \tan x| + C$$

(v) Evaluate the following double integral :

$$\int_1^2 \left(\int_{-3}^{4} 3x^2 y\,dy\right) dx$$

निम्नलिखित दोहरे समाकल का मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_1^2 \left(\int_{-3}^{4} 3x^2 y\,dy\right) dx$$

(vi) Give the statement of Fubini's theorem.

फुबिनी प्रमेय का विवरण दीजिए।

(vii) Find the volume of the sphere of radius 'a'.

त्रिज्या 'a' के गोले का आयतन ज्ञात कीजिए।

(viii) f is the function defined on $[a, b]$ and $f'(x)$ is continuous, then length of the curve $y = f(x)$ over $[a, b]$ is given as ....

f, $[a, b]$ पर परिभाषित फलन है और $f'(x)$ निरन्तर है, तो $[a, b]$ तक वक्र $y = f(x)$ की लम्बाई .... से दर्शाई जाती है। 2×8=16

Section–B (खण्ड–ब)

Unit–I (इकाई–I)

2. (a) Evaluate :

$$\int_0^1 \tan^{-1} x \, dx$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_0^1 \tan^{-1} x \, dx$$

(b) Show that :

$$\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \log 2$$

दर्शाइए कि :

$$\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \log 2$$

6½,7

Or (अथवा)

3. (a) Evaluate :

$$\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}dx$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}dx$$

(b) Prove that :

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$$ 6½,7

Unit–II (इकाई–II)

4. (a) Using Walli's formula show that :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx = \frac{(2n)!}{(2^n.n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

वाली के सूत्र का उपयोग करते हुए दर्शाइए कि :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx = \frac{(2n)!}{(2^n.n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

Evaluate/Show that :

$$-\int_0^{\pi/4} (\cos 2\theta)^{3/2} \cos\theta \, d\theta = \frac{3\pi}{16\sqrt{2}}$$

मूल्यांकन/दर्शाइए कि :

$$\int_0^{\pi/4} (\cos 2\theta)^{3/2} \cos\theta \, d\theta = \frac{3\pi}{16\sqrt{2}}$$ 6½,7

Or (अथवा)

5. (a) Calculate :

$$\int_0^1 x^3 (\log x)^2 \, dx$$

$\int_0^1 x^3 (\log x)^2 \, dx$ की गणना कीजिए।

(b) If :

$$I_n = \int_0^a (a^2 - x^2)^n \, dx \quad \text{and } n > 0,$$

prove that :

$$I_n = \frac{2na^2}{2^n + 1} I_{n-1}$$

यदि

$$I_n = \int_0^a (a^2 - x^2)^n \, dx \quad \text{और } n > 0,$$

तो सिद्ध कीजिए कि :

$$I_n = \frac{2na^2}{2^n + 1} I_{n-1}$$ 6½,7

Unit–III (इकाई–III)

6. (a) Find the area of the curve :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1$$

निम्न वक्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1$$

(b) Find the volume x-axis of the solid obtained by revolving one arc of the cycloid :

$$x = a(\theta + \sin\theta);$$
$$y = a(1 + \cos\theta)$$

about x-axis.

निम्न चक्रज के एक चाप को घुमाने पर प्राप्त ठोस का आयतन x-अक्ष के विषय में ज्ञात कीजिए :

$$x = a(\theta + \sin\theta);$$
$$y = a(1 + \cos\theta)$$

6½,7

Or (अथवा)

7. (a) Show that area included between parabolas $y^2 = 4a(x + a)$ and $y^2 = 4b(b - x)$ is $\frac{8}{3}\sqrt{ab}(a+b)$.

दर्शाइए कि परवलय $y^2 = 4a(x + a)$ और $y^2 = 4b(b-x)$ के बीच का क्षेत्रफल $\frac{8}{3}\sqrt{ab}(a+b)$ है।

Find the length of the arc of the parabola $y^2 = 4ax$ extending from vertex (0, 0) to an extremity of latus rectum $(a, 2a)$.

परवलय $y^2 = 4ax$ के शीर्ष (0, 0) से लेट्स रेक्टम $(a, 2a)$ के एक सिरे तक फैले हुए चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए। 6½,7

Unit–IV (इकाई–IV)

8. (a) Change the order of integration and hence evaluate :

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} xy\, dy\, dx$$

समाकलन का क्रम बदलकर निम्न का मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} xy\, dy\, dx$$

(b) Evaluate :

$$\iiint \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dx\,dy\,dz$$

over the region bounded by ellipsoid :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ द्वारा निर्मित परिबद्ध क्षेत्र में $\iiint\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dx\,dy\,dz$ का मूल्यांकन कीजिए। 6½,7

Or (अथवा)

9. (a) Evaluate :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

(b) By the help of triple integral, calculate the volume of right circular cone with Base radius '*r*' and height '*h*'.

त्रिपक्षीय समाकल की सहायता से, आधार त्रिज्या '*r*' और ऊँचाई '*h*' वाले लम्ब वृत्तीय शंकु के आयतन की गणना कीजिए। 6½,7

Roll No. ....

Total No. of Questions : 9] [Total No. of Printed Pages : 7

(2033)

UG (CBCS) IInd Year Annual Examination

3182

B.A./B.Sc. MATHEMATICS

(Algebra)

(Core)

Paper : MATH202TH

Time : 3 Hours] **[Maximum Marks : 70**

Note :– Section–A is compulsory. In Section-B attempt *one* question each from Units–I, II, III and IV.

खण्ड–अ अनिवार्य है। खण्ड–ब की प्रत्येक इकाई I, II, III तथा IV से **एक-एक** प्रश्न का उत्तर दीजिए।

Section–A (खण्ड–अ)

Compulsory Question (अनिवार्य प्रश्न)

1. Do as directed : 2×8=16

(i) Let Q_+ be the set of all positive rational numbers and * a binary operation on Q_+ defined by $a * b = \frac{ab}{3}$. The inverse of 'a' is ....

(ii) Define order of an element of a group G.

(iii) If H and K are finite subgroups of a group G, then O(HK) = ...

(iv) The index of every subgroup of a finite group .... the order of the group.

(v) Every quotient group of cyclic group is cyclic. (True/False)

(vi) State first theorem of Homomorphism.

(vii) Define Integral domain.

(viii) An arbitrary intersection of subrings is .... subring.

निर्देशानुसार कीजिए :

(i) मान लीजिए कि Q_+ सभी धनात्मक परिमेय संख्याओं का समुच्चय है और * एक बाइनरी संक्रिया Q_+ पर $a * b = \frac{ab}{3}$ द्वारा परिभाषित है। 'a' का व्युत्क्रम है ....

(ii) एक समूह G के एक तत्व के क्रम को परिभाषित कीजिए।

(iii) यदि H और K एक समूह G के परिमित उपसमूह हैं, तो O(HK) = ...

(iv) एक परिमित समूह के प्रत्येक उपसमूह का सूचकांक .... समूह का क्रम है।

(v) चक्रीय समूह का प्रत्येक भागफल समूह चक्रीय होता है। (सत्य/असत्य)

(vi) समाकारिता की प्रथम प्रमेय का वर्णन कीजिए।

(vii) समाकल क्षेत्र को परिभाषित कीजिए।

(viii) उपवलय का यादृच्छिक प्रतिच्छेद .... उपवलय है।

Section–B (खण्ड–ब)

Unit–I (इकाई–I)

2. (a) Let Q* denotes the set of all rational numbers except –1. Show that Q* forms an infinite abelian group under the operation * defined by $a*b = a + b + ab$, for all $a, b \in$ Q*.

मान लीजिए Q*, –1 को छोड़कर सभी परिमेय संख्याओं के समुच्चय को दर्शाता है। दर्शाइए कि सभी $a, b \in$ Q* के लिए $a*b = a + b + ab$ द्वारा परिभाषित संक्रिया * के अन्तर्गत Q* एक अनंत आबेलियन समूह बनाता है।

(b) Let a, b and x be any elements of a group G. Then prove that :

(i) $O(a^{-1}) = O(a)$

(ii) $(x^{-1}\ ax)^k = x^{-1}\ a^k\ x$ for all $k \in I$

(iii) $O(a) = O(x^{-1}\ ax)$

मान लीजिए a, b और x, समूह G के कोई अवयव हैं, तो सिद्ध कीजिए :

(i) $O(a^{-1}) = O(a)$

(ii) $(x^{-1}\ ax)^k = x^{-1}\ a^k\ x$ सभी $k \in I$ के लिए

(iii) $O(a) = O(x^{-1}\ ax)$

7,6½

3. (a) Show that the set {1, 2, 3, 4, ... $p - 1$}, where p is a prime number forms a finite abelian group of order $p - 1$ under the composition of multiplication modulo p.

दर्शाइए कि समुच्चय {1, 2, 3, 4, ... $p - 1$}, जहाँ p एक अभाज्य संख्या है, गुणन मॉड्यूलों p की संरचना के अन्तर्गत $p - 1$ कोटि का परिमित आबेलियन समूह बनाता है।

(b) If $a^2b = b^2a = b$ for all $a, b \in G$ (a semi group), then prove that G is abelian.

यदि सभी $a, b \in G$ (एक अर्द्धसमूह) के लिए $a^2b = b^2a = b$, तो सिद्ध कीजिए कि G आबेलियन है। 7,6½

Unit–II (इकाई–II)

4. (a) A non-empty subset H of a group G is a subgroup of G if and only if $a \in H, b \in H \Rightarrow a b^{-1} \in H$.

एक समूह G का एक गैर-रिक्त उपसमुच्चय H, G का एक उपसमूह है। यदि और केवल यदि $b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$.

(b) The intersection of an arbitrary collection of subgroups of a group is again a subgroup of the group.

एक समूह के उपसमूह के यादृच्छिक संग्रह का प्रतिच्छेदन फिर से समूह का एक उपसमूह है।

7,6½

5. (a) Prove that every subgroup of a cyclic group is cyclic. Is the converse true ?

सिद्ध कीजिए कि चक्रीय समूह का प्रत्येक उपसमूह चक्रीय होता है। क्या यह परिवर्तित सत्य है ?

(b) State and prove Lagrange's theorem.

लैग्रांज की प्रमेय को सिद्ध करते हुए वर्णन कीजिए। 7,6½

Unit–III (इकाई–III)

6. (a) A subgroup H of a group G is a normal subgroup of G if and only if $ghg^{-1} \in H$ for every $h \in H$ and $g \in G$.

समूह G का एक H उपसमूह, G का एक सामान्य उपसमूह है यदि और केवल यदि प्रत्येक $h \in H$ और $g \in G$ के लिए $ghg^{-1} \in H$ है।

(b) If H is a subgroup of G such that $x^2 \in H$ for all $x \in G$, then prove that H is a normal subgroup of G.

यदि H, G का एक ऐसा उपसमूह है कि सभी $x \in G$ के लिए $x^2 \in H$ है, तो सिद्ध कीजिए कि H, G का एक प्रसामान्य उपसमूह है।

7,6½

7. (a) Let N be a normal subgroup of a group G. Show that G/N is abelian if and only if for all $x, y \in G$, $xyx^{-1}y^{-1} \in N$.

मान लीजिए कि N समूह G का एक सामान्य उपसमूह है। दर्शाइए कि यदि और केवल यदि सभी $x, y \in G$, $xyx^{-1}y^{-1} \in N$ के लिए G/N आबेलियन है।

(b) The necessary and sufficient condition for a Homomorphism of a group G into a group G′ with kernel K to be isomorphism is that $K = \{e\}$.

समूह G के समूह G′ में कर्नेल K के समरूपता होने के लिए $K = \{e\}$ आवश्यक और पर्याप्त शर्त है। 7,6½

Unit–IV (इकाई–IV)

8. (a) Show that the set $Z_n = \{0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots\, n-1\}$ forms a finite commutative ring with unity, under addition and multiplication modulo n. (n is a prime > 1).

दर्शाइए कि समुच्चय $Z_n = \{0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots\, n-1\}$ योग और गुणन मॉड्यूलो n के अन्तर्गत एकता के साथ एक परिमित क्रम विनिमय वलय बनाता है। (n एक अभाज्य > 1 है)

(b) Prove that every field is an Integral domain.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्षेत्र एक समाकल क्षेत्र है। 7,6½

9. (a) Prove that intersection of a family of subrings of a ring R is a subring of R.

सिद्ध कीजिए कि वलय R के उपवलयों के परिवार का प्रतिच्छेदन R का उपवलय है।

(b) Prove that the sum and product of two ideals is again an ideal.

सिद्ध कीजिए कि दो आइडलों का योग एवं गुणनफल पुनः एक आइडल होता है। 7,6½

Roll No. ....

Total No. of Questions : 9] [Total No. of Printed Pages : 7

(2033)

UG (CBCS) IInd Year Annual Examination

3181

B.A./B.Sc. MATHEMATICS

(Real Analysis)

(Core)

Paper : MATH201TH

Time : 3 Hours] [Maximum Marks : 70

Note :– Question No. **1** is compulsory. Attempt *one* question each from Units I, II, III, IV. Marks are given against the questions.

प्रश्न क्र. **1** अनिवार्य है। प्रत्येक इकाई I, II, III, IV से एक-एक प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न के सामने अंक दिए हैं।

Section–A

(खण्ड–अ)

Compulsory Question (अनिवार्य प्रश्न)

1. (i) If a, b, c, d are positive real numbers such that $a > b$ and $c > d$, then $a.c. < b.d.$

यदि a, b, c, d धनात्मक वास्तविक संख्याए हैं जैसे कि $a > b$ और $c > d$, तो $a.c. < b.d.$

(ii) Solve :

$$2x - 3 < 5x + 3 < 2x + 3$$

हल कीजिए :

$$2x - 3 < 5x + 3 < 2x + 3$$

(iii) State Archimedian property of real numbers.

वास्तविक संख्याओं के आर्किमिडीयन गुण का वर्णन कीजिए।

(iv) State bounded and unbounded sequences.

परिबद्ध और अपरिबद्ध अनुक्रम का वर्णन कीजिए।

(v) State Cauchy's second theorem on limits.

लिमिट पर कॉशी की द्वितीय प्रमेय का वर्णन कीजिए।

(vi) Show that the series $1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + n^2 + \ldots$ diverges to ∞.

दर्शाइए कि श्रेणी $1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + n^2 + \ldots, \infty$ से बदल जाती है।

(vii) Find the radius of convergence of the power series $\sum\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

घात श्रेणी $\sum\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ की अभिसरण की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

(viii) State m_n-test for uniform convergence.

एकसमान अभिसरण के लिए m_n-परीक्षण का वर्णन कीजिए। 2×8=16

Section–B

(खण्ड–ब)

Unit–I

(इकाई–I)

2. (a) Show that $\sqrt{7}$ is not a rational number.

दर्शाइए कि $\sqrt{7}$ एक परिमेय संख्या नहीं है।

(b) Solve :

$$\frac{7x+5}{x-3}<2$$

हल कीजिए :

$$\frac{7x+5}{x-3}<2$$ 6½, 7

3. (a) For what values of x is $x^2 - x - 30 > 0$?

x के किन मानों के लिए $x^2 - x - 30 > 0$ है ?

(b) Find g.l.b. and l.u.b. for $\{\sin^2 x + \cos^4 x : x \in R\}$.

$\{\sin^2 x + \cos^4 x : x \in R\}$ के लिए l.u.b. तथा g.l.b. ज्ञात कीजिए। 6½, 7

Unit–II

(इकाई–II)

4. (a) Prove that :

$$\underset{n\to\infty}{\text{Lt}} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall\, a > 0$$

सिद्ध कीजिए :

$$\underset{n\to\infty}{\text{Lt}} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall\, a > 0$$

(b) State and prove Cauchy's first theorem on limits.

लिमिट पर कॉशी की प्रथम प्रमेय को सिद्ध कर वर्णन कीजिए। 6½, 7

5. (a) Prove that :

$$\underset{n\to\infty}{\text{Lt}} \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{(n+n)^2}\right] = 0$$

सिद्ध कीजिए :

$$\underset{n\to\infty}{\text{Lt}} \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{(n+n)^2}\right] = 0$$

(b) Show that the sequence $\left\{\frac{2n+9}{3n+1}\right\}$ is monotonically increasing.

दर्शाइए कि अनुक्रम $\left\{\frac{2n+9}{3n+1}\right\}$ नीरस रूप से बढ़ रहा है। 6½, 7

Unit–III

(इकाई–III)

6. (a) Show that $\sum(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$ oscillates finitely.

दर्शाइए कि $\sum(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$ परिमित रूप से दोलन करता है।

(b) Discuss the convergence or divergence of the series $\sum\frac{1}{n(n+1)}$.

शृंखला $\sum\frac{1}{n(n+1)}$ के अभिसरण या विचलन पर चर्चा कीजिए। 6½, 7

7. (a) Discuss the convergence of the series $\sum\left(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2-1}\right)$.

शृंखला $\sum\left(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2-1}\right)$ के अभिसरण पर चर्चा कीजिए।

(b) Discuss the divergence of the series :

$$\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5.}{2.4.6.}+..........$$

शृंखला $\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5.}{2.4.6.}+..........$ के विचलन पर चर्चा कीजिए। 6½, 7

Unit–IV

(इकाई–IV)

8. (a) Show that the sequence $\{f_n\}$ where :

$$f_n(x)=\frac{x}{1+nx^2},\ x \in \mathrm{R}$$

converges uniformly on any closed interval.

दर्शाइए कि अनुक्रम $\{f_n\}$ जहाँ $f_n(x)=\frac{x}{1+nx^2},\ x \in \mathrm{R}$ किसी भी बंद अंतराल पर समान रूप से अभिसरित होता है।

(b) Show that $\sum \frac{a_n}{x^x}$ converges uniformly in [0, 1], if $\sum a_n$ converges.

दर्शाइए कि $\sum \frac{a_n}{x^x}$ समान रूप से [0, 1] में अभिसरण करता है, यदि $\sum a_n$ अभिसरण करता है। 6½, 7

9. (a) Find the radius of convergence and interval of convergence of the power series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

घात शृंखला $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ की अभिसरण की त्रिज्या और अभिसरण का अंतराल ज्ञात कीजिए।

(b) Find the values for which the power series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n}$ converges.

वह मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए घात श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n}$ अभिसरित होती है। 6½, 7

Roll No. ....

Total No. of Questions : 9] [Total No. of Printed Pages : 8

(2033)

UG (CBCS) Ist Year Annual Examination

3046

B.A./B.Sc. MATHEMATICS

(Differential Calculus)

(Core)

Paper : MATH101TH

Time : 3 Hours] **[Maximum Marks : 70**

Note :– Attempt *five* questions in all. Section–A is compulsory and from Section–B, attempt *one* question from each of the Units I, II, III and IV.

कुल **पाँच** प्रश्नों को हल कीजिए। खण्ड–अ अनिवार्य है तथा खण्ड–ब की प्रत्येक इकाई I, II, III तथा IV में से **एक-एक** प्रश्न कीजिए।

Section–A (खण्ड–अ)

Compulsory Question (अनिवार्य प्रश्न)

1. (i) Use definition of limit to prove that :

$$\underset{x \to 3}{\text{Lt}} (1 - 3x) = -8$$

लिमिट की परिभाषा प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि :

$$\underset{x \to 3}{\text{Lt}} (1 - 3x) = -8$$

(ii) Find the derivatives of 2nd order of :

$$f(x) = x^2 \log |\cos x|$$

$f(x) = x^2 \log |\cos x|$ के द्वितीय क्रम के व्युत्पन्न का मान ज्ञात कीजिए।

(iii) Evaluate :

$$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x^2}$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x^2}$$

(iv) State Rolle's theorem.

रॉले की प्रमेय का वर्णन कीजिए।

(v) Define concavity or convexity of a curve.

वक्र की अवतलता अथवा उत्तलता की परिभाषा दीजिए।

(vi) Prove that the curvature of a straight line is zero.

सिद्ध कीजिए कि सरल रेखा की वक्रता शून्य होती है।

(vii) Find :

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}$$

if $f = x^2 - x \sin y$ and $g = x^2y^2 + x + y$.

यदि $f = x^2 - x \sin y$ और $g = x^2y^2 + x + y$ है,

तो $\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}$ ज्ञात कीजिए।

(viii) Let $f(x, y) = \log(xy + 2y^2 - 2x)$. Find $f_x(2, 3)$ and $f_y (2, 3)$.

माना $f(x, y) = \log(xy + 2y^2 - 2x)$ है, तो $f_x(2, 3)$ और $f_y (2, 3)$ ज्ञात कीजिए। 2×8=16

Section–B

(खण्ड–ब)

Unit–I

(इकाई–I)

2. (a) If $\underset{x \to a}{\text{Lt}} f(x)$ exists finitely, then prove that it is unique.

यदि $\underset{x \to a}{\text{Lt}} f(x)$ पूर्णरूप से विद्यमान है, तो सिद्ध कीजिए कि यह एकमात्र है।

(b) If the function :

$$f(x)=\begin{cases}3ax+b, & \text{if} \quad x>1 \\ 11 \quad , & \text{if} \quad x=1 \\ 5ax-2b, & \text{if} \quad x<1\end{cases}$$

is continuous at $x = 1$, find 'a' and 'b'.

यदि फलन

$$f(x)=\begin{cases}3ax+b, & \text{यदि} \quad x>1 \\ 11 \quad , & \text{यदि} \quad x=1 \\ 5ax-2b, & \text{यदि} \quad x<1\end{cases}$$

$x=1$ पर सतत् है तो 'a' और 'b' ज्ञात कीजिए। 6½,7

3. (a) For what choices of 'a' and 'b' is the function :

$$f(x)=\begin{cases}x^2+3x+a, & x\geq 1 \\ bx+2 \quad , & x<1\end{cases}$$

is differentiable at $x = 1$?

'a' और 'b' के किन विकल्पों के लिए फलन

$$f(x)=\begin{cases}x^2+3x+a, & x\geq 1 \\ bx+2 \quad , & x<1\end{cases}$$

$x = 1$ पर अवकलनीय है ?

(b) If $y = (\sin^{-1} x)^2$, find $y_n(0)$.

यदि $y = (\sin^{-1} x)^2$ है तो $y_n(0)$ ज्ञात कीजिए। 6½,7

Unit–II

(इकाई–II)

4. (a) Evaluate :

$$\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\tan x}$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\tan x}.$$

(b) Calculate the approximate value of $\sqrt{26}$ to three decimal places by Taylor's expansion.

टेलर के विस्तार द्वारा $\sqrt{26}$ से तीन दशमलव स्थानों तक अनुमानित मान की गणना कीजिए। 6½,7

5. (a) State and prove Lagrange's mean value theorem.

लेग्रांजे के माध्यमान प्रमेय का वर्णन कर सिद्ध कीजिए।

(b) Verify Rolle's theorem for the function $e^x \sin x$ in $[0, \pi]$.

$[0, \pi]$ में फलन $e^x \sin x$ के लिए रोले के प्रमेय को सत्यापित कीजिए। 6½,7

Unit–III

(इकाई–III)

6. (a) Examine the curve $y = x^4 - 2x^3 + 1$ for concavity upwards, concavity downwards and points of inflexion.

ऊपर की ओर अवतलता, नीचे की ओर अवतलता तथा मोड़ बिन्दु के लिए वक्र $y = x^4 - 2x^3 + 1$ का परीक्षण कीजिए।

(b) Find all the asymptote of the curve :

$$x^3 - 5x^2y + 8xy^2 - 4y^3 + x^2 - 3xy + 2y^2 - 7 = 0$$

वक्र $x^3 - 5x^2y + 8xy^2 - 4y^3 + x^2 - 3xy + 2y^2 - 7 = 0$ की सभी अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए। 6½,7

7. (a) Show that the asymptotes of the cubic curve $x^3 - xy^2 - 2xy + 2x - y - 1 = 0$ cut the curve in at most three points which lie on the line $3x - y - 1 = 0$.

दर्शाइए कि घन वक्र $x^3 - xy^2 - 2xy + 2x - y - 1 = 0$ की अनन्तस्पर्शियाँ अधिकतम तीन बिन्दुओं में वक्र को काटती हैं जो रेखा $3x - y - 1 = 0$ पर हैं।

(b) Find the radius of curvature at and any point of curve $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ के किसी बिन्दु पर वक्रता की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। 6½,7

Unit–IV

(इकाई–IV)

8. (a) Discuss the continuity of $f(x, y)$ at (0, 0), where :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^3+y^3}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(0, 0) पर $f(x, y)$ की सातत्यता का वर्णन कीजिए, जहाँ

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^3+y^3}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(b) Verify Euler's theorem for $Z=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

$Z=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ के लिए यूलर प्रमेय को सिद्ध कीजिए। 6½,7

9. (a) Prove that $J_{f^{-1}}(\xi, \eta) = \xi$ for any (ξ, η) belonging to the range of f, where $f(x, y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \tan^{-1}\dfrac{y}{x}\right)$.

सिद्ध कीजिए कि f की श्रेणी से सम्बन्धित किसी भी (ξ, η) के लिए $J_{f^{-1}} (\xi, \eta) = \xi$ है, जहाँ $f(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$.

(b) Find the local maxima, local minima and saddle point, if any, of the function $f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x - 4$.

फलन $f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x - 4$ का स्थानीय उच्चिष्ठ, स्थानीय निम्निष्ठ और सैडल बिन्दु ज्ञात कीजिए, यदि कोई हो। 6½,7

Roll No. ....

Total No. of Questions : 9] [Total No. of Printed Pages : 8

(2102)

UG (CBCS) IInd Year Annual Supplementary Examination

2681

B.A./B.Sc. MATHEMATICS

(Real Analysis)

(Core)

Paper : MATH201TH

Time : 3 Hours] **[Maximum Marks : 70**

Note :– Question No. 1 is compulsory. Attempt *one* question from each Units I, II, III and IV. Marks are given against the questions of the question paper.

प्रश्न संख्या 1 अनिवार्य है। प्रत्येक इकाई I, II, III तथा IV से **एक-एक** प्रश्न का उत्तर दीजिए। प्रश्न-पत्र में अंक प्रश्नों के सम्मुख दिये गये हैं।

Section–A

(खण्ड–अ)

Compulsory Question

(अनिवार्य प्रश्न)

1. (i) If $a \le b$, $a \le c$ and $c \le a$, then $a = b = c$.

यदि $a \le b$, $a \le c$ तथा $c \le a$, तो $a = b = c$।

(ii) Solve $3x + 5 \le 1 - 4x$.

$3x + 5 \le 1 - 4x$ को हल कीजिए।

(iii) State Archimedian property of real numbers.

वास्तविक संख्याओं के आर्किमीडियन गुण (तत्व) का वर्णन कीजिए।

(iv) Define Null Sequence.

शून्य अनुक्रम की परिभाषा दीजिए।

(v) State Cauchy's first theorem on Limits.

लिमिट पर कॉशी की प्रथम प्रमेय का वर्णन कीजिए।

(vi) Show that the series :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots\ldots\ldots$$

converges to the sum 2.

दर्शाइए कि श्रेणी :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots\ldots\ldots$$

योग 2 तक अभिसरण करती है।

(vii) Find the radius of convergence of power series $\Sigma(5 + 12i)z^n$.

घात श्रेणी $\Sigma(5 + 12i)z^n$ के अभिसरण की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

(viii) State Abel's theorem.

आबेल प्रमेय का वर्णन कीजिए। 2×8=16

Section–B

(खण्ड–ब)

Unit–I

(इकाई–I)

2. (a) Show that $\sqrt{5}$ is not a rational number.

दर्शाइए कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या नहीं है।

(b) Solve :

$$\frac{2x-1}{x+2}<3$$

हल कीजिए :

$$\frac{2x-1}{x+2}<3$$

6½,7

3. (a) For what values of x, is $4x^2 + 9x < 9$?

x के किस मान तक $4x^2 + 9x < 9$ है ?

(b) Show that the set :

$$S = \left\{ \frac{3-x}{1-x}, x > 0, x \neq 1 \right\}$$

is neither bounded above nor bounded below.

दर्शाइए कि समुच्चय :

$$S = \left\{ \frac{3-x}{1-x}, x > 0, x \neq 1 \right\}$$

न तो ऊपर परिबद्ध है और न नीचे। 6½,7

Unit–II

(इकाई–II)

4. (a) Prove that :

$$\underset{n \to \infty}{\text{Lt}} \sqrt[n]{n} = 1$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\underset{n \to \infty}{\text{Lt}} \sqrt[n]{n} = 1$$

(b) State and prove Cauchy's second theorem on limits.

कॉशी की द्वितीय प्रमेय लिमिट पर सिद्ध कर वर्णन कीजिए।

6½,7

5. (a) Show that :

$$\underset{n\to\infty}{\text{Lt}}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\dots\dots+\frac{1}{(2n)^2}\right]=0$$

दर्शाइए कि :

$$\underset{n\to\infty}{\text{Lt}}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\dots\dots+\frac{1}{(2n)^2}\right]=0$$

(b) Prove that the sequence $\left\{\frac{2n-7}{3n+2}\right\}$ is monotonically increasing.

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\left\{\frac{2n-7}{3n+2}\right\}$ एकरस रूप से बढ़ रहा है। 6½,7

Unit–III

(इकाई–III)

6. (a) Use Leibnitz's test to show that the series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+5)}{n(n+1)}$ converges.

यह दिखाने के लिए कि शृंखला $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+5)}{n(n+1)}$ अभिसरण करती है, लाइबनित्ज़ परीक्षण का उपयोग कीजिए।

(b) Show that the series :

$$\frac{1}{\log 2}-\frac{1}{\log 3}+\frac{1}{\log 4}-\frac{1}{\log 5}+.....$$

is conditionally convergent.

दर्शाइए कि श्रृंखला :

$$\frac{1}{\log 2}-\frac{1}{\log 3}+\frac{1}{\log 4}-\frac{1}{\log 5}+.....$$

सशर्त अभिसरण करती है। 6½,7

7. (a) Discuss the convergence of the series :

$$\sum\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$$

श्रृंखला $\sum\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$ के अभिसरण का वर्णन कीजिए।

(b) Prove that the series :

$$\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+.......$$

is divergent.

सिद्ध कीजिए कि श्रृंखला $\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+.......$ अपसारी है। 6½,7

(इकाई–IV)

8. (a) Show that the series :

$$\frac{1}{(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{x+(n-1)(x+n)}+\ldots\ldots\ldots$$

converges uniformly on [0, 1].

दर्शाइए कि शृंखला :

$$\frac{1}{(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{x+(n-1)(x+n)}+\ldots\ldots\ldots$$

[0, 1] पर समरूप अभिसारी है।

(b) Test the convergence of series :

$$\sum\frac{1}{(x^2+n)(x^2+nx)}$$

शृंखला $\sum\frac{1}{(x^2+n)(x^2+nx)}$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए। 6½,7

9. (a) Prove that the series :

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+.........$$

converges the $-1 < x \leq 1$.

सिद्ध कीजिए कि शृंखला $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+.........$ अभिसरण करती है $-1 < x \leq 1$।

(b) Find the radius of convergence and interval of convergence of power series $\sum_{n=1}^{\infty} \lfloor n \, x^n$.

घात शृंखला $\sum_{n=1}^{\infty} \lfloor n \, x^n$ के अभिसरण की त्रिज्या तथा अभिसरण के अन्तराल को ज्ञात कीजिए। 6½,7

Roll No. ....

Total No. of Questions : 9] [Total No. of Printed Pages : 16

(2093)

UG (CBCS) IIIrd Year (Suppl.) Examination

2342

B.A./B.Sc. MATHEMATICS

(Probability and Statistics)

(SEC-3.1)

Paper : MATH313TH

Time : 3 Hours] [Maximum Marks : 70

Note :– (i) Attempt *five* questions in all. Section–A is compulsory and from Section–B attempt *one* question from each of the Units I, II, III and IV.

(ii) Tables of Area under normal curve and $\bar{e}^{m}$ can be had on demand.

(i) कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। खण्ड–अ अनिवार्य है तथा खण्ड–ब की प्रत्येक इकाई I, II, III व IV से **एक-एक** प्रश्न कीजिए।

(ii) सामान्य वक्र के अन्तर्गत क्षेत्र की सारणियाँ तथा $\bar{e}^{m}$ मांगने पर दिये जा सकते हैं।

Section–A

(खण्ड–अ)

Compulsory Question

(अनिवार्य प्रश्न)

1. (i) Define Mutually Exclusive Events.

परस्पर अनन्य घटनाओं को परिभाषित कीजिए।

(ii) Check whether the given can define and explain your answer where :

$$f(x) = \frac{5-x^2}{6}, x = 0, 1, 2, 3$$

जाँच कीजिए कि दिया गया आपके उत्तर को परिभाषित और वर्णन कर सकता है, जहाँ :

$$f(x) = \frac{5-x^2}{6}, x = 0, 1, 2, 3$$

(iii) For any random variable X and a and b are constants, Var $(aX + b)$ = ...

किसी भी यादृच्छिक चर के लिए X और a और b स्थिरांक हैं, Var $(aX + b)$ = ...

(iv) Find the probability distribution of the number of heads when three coins are tossed simultaneously.

जब तीन सिक्के एक साथ उछाले जाते हैं, तो चित्त आने की प्रायिकता का सम्भाव्यता वितरण ज्ञात कीजिए।

(v) Comment on the following :

The mean of a Poisson distribution is 3 and variance is 4.

निम्नलिखित पर टिप्पणी कीजिए :

प्वासां वितरण का माध्य 3 और विचरण 4 है।

(vi) In a family of five children, what is the probability that there will be exactly two boys, assuming that the sexes are equally likely ?

पाँच बच्चों के एक परिवार में, यह मानते हुए कि लिंगों की सम्भावना समान है, क्या प्रायिकता है कि बिल्कुल दो लड़के होंगे ?

(vii) If the joint p.d.f. of two continuous random variables X and Y is given by :

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{8}{9}xy & , \quad 1\le x\le y\le 2\\ 0 & , \quad \text{otherwise}\end{cases}$$

Find the marginal density function of X.

यदि दो निरन्तर यादृच्छिक चर X और Y का संयुक्त संभाव्यता घनत्व

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{8}{9}xy & , \quad 1\le x\le y\le 2\\ 0 & , \quad \text{अन्यथा}\end{cases}$$

फलन द्वारा दिया गया है।

X का सीमान्त घनत्व फलन ज्ञात कीजिए।

(viii) Find k so that $f(x, y) = kxy,\ 1 \le x \le y \le 2$ will be the join probability density function.

k ज्ञात कीजिए जिससे $f(x, y) = kxy,\ 1 \le x \le y \le 2$ संयुक्त प्रायिकता घनत्व फलन होगा। 2×8=16

Section–B

(खण्ड–ब)

Unit–I

(इकाई–I)

2. (i) If $P(A) = p$, $P(B) = q$, then show that :

$$P(A/B) \ge \frac{p+q+1}{q}.$$

यदि $P(A) = p$, $P(B) = q$ है, तो दर्शाइए कि :

$$P(A/B) \ge \frac{p+q+1}{q}.$$

Turn Over

(ii) A petrol pump is supplied with petrol once in a day. If its daily volume of sale (X) in thousand litres is distributed as $f(x) = 5(1-x)^4, 0 \leq x \leq 1$. What must be the capacity of its tank in order that the probability that is supply will be exhausted in a given day shall be 0.01 ?

एक पेट्रोल पम्प पर दिन में एक बार पेट्रोल आपूर्ति की जाती है। यदि इसकी दैनिक बिक्री की मात्रा (X) हजार लीटर में तो इसे $f(x) = 5(1-x)^4, 0 \leq x \leq 1$ के रूप में वितरित किया जाता है। इसके टैंक की क्षमता क्या होनी चाहिए जिससे किसी दिये गये दिन में आपूर्ति समाप्त होने की प्रायिकता 0.01 हो ? 7,6½

3. (i) Find the probability distribution of number of heads in four tosses of a coin.

एक सिक्के को चार बार उछालने पर चित्त आने की प्रायिकता वितरण ज्ञात कीजिए।

(ii) Assuming the probability of a male birth as $\frac{1}{2}$, find the chances that a family of 3 children will have :

(a) At least one girl

(b) Two boys and one girl

(c) Atmost two girls.

एक लड़के के जन्म की प्रायिकता को $\frac{1}{2}$ मानते हुए 3 बच्चों वाले परिवार में होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए :

(a) कम से कम एक लड़की

(b) दो लड़के और एक लड़की

(c) अधिकतम दो लड़कियाँ। 7,6½

Unit–II

(इकाई–II)

4. (i) In a continuous random distribution, whose relative frequency density is given by $f(x) = \frac{3}{4}x\ (2 - x),\ 0 \le x \le 2$ and zero elsewhere. Show that $\mu_3 = 0$.

एक सतत यादृच्छिक वितरण में जिसका सापेक्ष आवृत्ति घनत्व $f(x) = \frac{3}{4}x\ (2 - x),\ 0 \le x \le 2$ और अन्यत्र शून्य दिया जाता है। दर्शाइए कि $\mu_3 = 0$.

(ii) An urn contains 3 black and 2 white marbles. Four persons A, B, C and D in order, draw one marble without replacement. The first to draw a white gets ₹ 10. Compute their expectations.

एक कलश में 3 काले और 2 सफेद पत्थर हैं। चार व्यक्ति A, B, C और D क्रम से बिना प्रतिस्थापन के एक पत्थर निकालते हैं। सबसे पहले सफेद रंग निकालने वाले को ₹ 10 मिलते हैं। उनकी अपेक्षाओं की गणना कीजिए। 7,6½

5. (i) If X is some random variable with characteristic function $\phi(t)$ and if $\mu_r' = E(X^r)$ exists, then :

$$\mu_r' = (-i)^r \left[\frac{\partial r}{\partial t^r}\phi(t)\right]_{t=0}$$

यदि X विशेषता फलन $\phi(t)$ के साथ कुछ यादृच्छिक चर है और यदि $\mu_r' = E(X^r)$ मौजूद है तो :

$$\mu_r' = (-i)^r \left[\frac{\partial r}{\partial t^r}\phi(t)\right]_{t=0}$$

(ii) For any random variable X, prove that :

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

किसी भी यादृच्छिक चर X के लिए, सिद्ध कीजिए कि :

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$ 7,6½

Unit–III

(इकाई–III)

6. (i) If on the average, 1 ship in every 10 is sunk, find the chance that out of 5 ships expected, 4 at least will arrive safely.

यदि औसतन, प्रत्येक 10 में से 1 जहाज डूब जाता है, तो अपेक्षित 5 जहाजों में से, कम से कम 4 सुरक्षित रूप से पहुँच जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(ii) Assuming the probability that a bomb dropped from an aeroplane will strike a certain target is $\frac{1}{5}$. If 6 bombs are dropped, find the probability that at least 2 will strike the target.

(use $e^{-1/2} = 0.3012$]

यह मानते हुए कि हवाई जहाज से गिराया गया बम एक निश्चित लक्ष्य पर हमला करेगा, इसकी प्रायिकता $\frac{1}{5}$ है। यदि 6 बम गिराये जाते हैं, तो कम से कम 2 के लक्ष्य पर प्रहार करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(प्रयोग कीजिए $e^{-1/2} = 0.3012$)

7,6½

7\. (i) For rectangular distribution $f(x) = 1$, $1 \le x \le 2$. Find A.M., G.M., H.M. and standard deviation and show that A.M. > G.M. > H.M.

आयताकार वितरण के लिए $f(x) = 1, 1 \leq x \leq 2$.
A.M., G.M., H.M. और मानक विचलन ज्ञात कीजिए
और दर्शाइए कि A.M. > G.M. > H.M.

(ii) If X is a normal variate with mean μ and variance $\sigma^2 > 0$, then show that a new random variable Z defined by $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ is a variate with mean 0 and variance 1. Also find the moment generating function of Z.

यदि X, माध्य μ और विचरण $\sigma^2 > 0$ के साथ एक सामान्य चर है, तो दर्शाइए कि $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ द्वारा परिभाषित एक नया यादृच्छिक चर Z माध्य 0 और विचरण 1 के साथ एक चर है। Z का महत्व उत्पन्न करने वाला फलन भी ज्ञात कीजिए। 7,6½

Unit–IV

(इकाई–IV)

8. (i) If the joint p.d.f. of two continuous random variables X and Y is given by :

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}(2x+y) & , \quad 0<x<1, 0<y<2 \\ 0 & , \quad \text{otherwise}\end{cases}$$

Find :

(a) Marginal density functions

(b) The conditional density of Y given $X = \frac{1}{4}$.

यदि दो निरन्तर यादृच्छिक चर X और Y का संयुक्त प्रायिकता घनत्व फलन

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}(2x+y) & , \quad 0<x<1, 0<y<2 \\ 0 & , \quad \text{अन्यथा}\end{cases}$$

द्वारा दिया गया है।

ज्ञात कीजिए :

(अ) सीमान्त घनत्व फलन

(ब) दिये गये $X = \frac{1}{4}$ का Y का सशर्त घनत्व

(ii) The random variables X and Y are jointly distributed as :

$$f(x, y) = e^{-(x + y)}, x > 0, y > 0$$

Are X and Y independent ? Find P(X > 1) and P(X < Y/X < 2Y).

यादृच्छिक चर X और Y को संयुक्त रूप से विचरित किया जाता है :

$$f(x, y) = e^{-(x + y)}, x > 0, y > 0$$

क्या X और Y स्वतन्त्र हैं। P(X > 1) और P(X < Y/X < 2Y) ज्ञात कीजिए। 7,6½

9. (i) If X and Y are two random variables having joint density function :

$$f(x,y)=\begin{cases}6x^2y & , \quad 0<x<1, 0<y<1 \\ 0 & , \quad \text{otherwise}\end{cases}$$

Find :

(a) $P(X + Y < 1)$

(b) $P(X > Y)$

(c) $P(X < 1/Y < 2)$

यदि संयुक्त घनत्व फलन वाले दो यादृच्छिक X तथा Y चर हैं :

$$f(x,y)=\begin{cases}6x^2y & , \quad 0<x<1, 0<y<1 \\ 0 & , \quad \text{अन्यथा}\end{cases}$$

ज्ञात कीजिए :

(अ) $P(X + Y < 1)$

(ब) $P(X > Y)$

(स) $P(X < 1/Y < 2)$

ii) If X and Y are two random variables, then the covariance between them is obtained as $Cov(X, Y) = E[\{X - E(X)\} \{Y - E(Y)\}]$

यदि X और Y दो यादृच्छिक चर हैं, तो उनके बीच का सहसंयोजक $Cov(X, Y) = E[\{X - E(X)\} \{Y - E(Y)\}]$ के रूप में प्राप्त किया जाता है। 7,6½

Roll No. ....

Total No. of Questions : 9] [Total No. of Printed Pages : 8

(2093)

UG (CBCS) IIIrd Year (Suppl.) Examination

2340

B.A./B.Sc. MATHEMATICS

(Numerical Methods)

(DSE–3B.1)

Paper : MATH304TH

Time : 3 Hours] **[Maximum Marks : 70**

Note :– Section–A is compulsory. Attempt *four* questions from Section–B, selecting *one* each from Units I, II, III and IV. Use of non-scientific/non-programmable calculator is allowed.

खण्ड–अ अनिवार्य है। खण्ड ब से **चार** प्रश्न कीजिए। प्रत्येक इकाई I, II, III व IV से **एक-एक** प्रश्न कीजिए। नॉन-साइंटिफिक तथा नॉन-प्रोग्रामेबल कैलकुलेटर की अनुमति है।

Section–A (खण्ड–अ)

Compulsory Question (अनिवार्य प्रश्न)

1. (i) Find an interval of unit length which contains the smallest +ve root of equation :

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + x - 10 = 0$$

उस इकाई लम्बाई का एक अंतराल ज्ञात कीजिए जिसमें निम्न समीकरण का सबसे छोटा धनात्मक मूल हो :

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + x - 10 = 0$$

(ii) Write two disadvantages of Newton-Raphson method.

न्यूटन-रैफसन विधि की दो हानियाँ लिखिए।

(iii) Write Lagrange's first order interpolation formula.

लैग्रांजे का प्रथम कोटि अंतर्वेशन सूत्र लिखिए।

(iv) What is the difference between interpolation and extrapolation ?

अंतर्वेशन और बहिर्वेशन के मध्य क्या अन्तर है ?

(v) Find relation between ∇ and E.

∇ और E के मध्य सम्बन्ध ज्ञात कीजिए।

(vi) Construct forward difference table for :

x :	0	1	2	3
y :	–3	6	8	12

निम्नलिखित आँकड़ों के लिए अग्रांतर टेबल की रचना कीजिए :

x :	0	1	2	3
y :	–3	6	8	12

(vii) Write a method to solve first-order initial value problem.

प्रथम कोटि प्रारम्भिक मूल्य समस्या को हल करने के लिए एक विधि लिखिए।

(viii) What is the restriction in the number of nodal points required for Simpson's 3/8th Rule for integrating $\int_a^b f(x)\,dx$.

$\int_a^b f(x)\,dx$ के लिए सिम्पसन के 3/8 नियम के लिए आवश्यक नोडल बिन्दुओं की संख्या में क्या प्रतिबन्ध है ? 2×8=16

Section–B

(खण्ड–ब)

Unit–I

(इकाई–I)

2. (a) Find real root of equation $x^4 - x - 10 = 0$ by False-Position method correct to three decimal places.

असत्य स्थिति विधि से समीकरण $x^4 - x - 10 = 0$ का वास्तविक मूल तीन दशमलव स्थानों तक ज्ञात कीजिए।

6½,7

(b) Find real root of equation $x^3 - 9x + 1 = 0$ correct to three decimal places by fixed point iteration method.

निश्चित बिन्दु पुनरावृत्ति विधि द्वारा समीकरण $x^3 - 9x + 1 = 0$ का वास्तविक मूल तीन दशमलव स्थानों तक सही ज्ञात कीजिए। 6½,7

3. (a) Using secant method, find $\sqrt{12}$.

छेदिक विधि का प्रयोग करके $\sqrt{12}$ ज्ञात कीजिए।

(b) Find real root of equation $x^4 - 11x + 8 = 0$ by Newton-Raphson method, correct to four decimal places.

न्यूटन-राफ्सन विधि द्वारा समीकरण $x^4 - 11x + 8 = 0$ के वास्तविक मूल 4 दशमलव स्थानों तक सही ज्ञात कीजिए। 6½,7

Unit–II

(इकाई–II)

4. (a) Find Lagrange's polynomial that takes the same value as :

$y(1) = -3,\ y(3) = 9,\ y(4) = 30,\ y(6) = 132$

लैग्रांजे का बहुपद ज्ञात कीजिए जिसका मान $y(1) = -3,\ y(3) = 9,\ y(4) = 30,\ y(6) = 132$ के समान है।

(b) Solve by Gauss–Seidal method :

$$10x + 2y + z = 9$$
$$2x + 20y - 2z = -44$$
$$-2x + 3y + 10z = 22$$

गॉउस–सीडल विधि द्वारा हल कीजिए :

$$10x + 2y + z = 9$$
$$2x + 20y - 2z = -44$$
$$-2x + 3y + 10z = 22$$

6½,7

5. (a) Find $y(2.5)$ using Newton's Backward difference formula for $f(x)$ given by :

x	:	0	1	2	3
$f(x)$	:	0	2	8	27

दिये गये $f(x)$ के लिए न्यूटन पश्चगामी के अंतर सूत्र का उपयोग करके $y(2.5)$ ज्ञात कीजिए :

x	:	0	1	2	3
$f(x)$	:	0	2	8	27

(b) Solve using Jacobi method :

$$27x + 6y - z = 85$$
$$6x + 15y + 2z = 72$$
$$x + y + 54z = 110$$

जेकॉबी विधि द्वारा हल कीजिए :

$$27x + 6y - z = 85$$
$$6x + 15y + 2z = 72$$
$$x + y + 54z = 110$$

6½,7

Unit–III

(इकाई–III)

6. (a) Find $y'(4)$ and $y''(4)$ from the data :

x	:	0	1	2	3	4
y	:	5	8	12	17	26

निम्न आँकड़ों द्वारा $y'(4)$ और $y''(4)$ ज्ञात कीजिए :

x	:	0	1	2	3	4
y	:	5	8	12	17	26

(b) Estimate missing term in given table :

x	:	0	1	2	3	4
y	:	4	3	4	?	12

दी गई तालिका में लुप्त पद का अनुमान लगाइए :

x	:	0	1	2	3	4
y	:	4	3	4	?	12

6½,7

7. (a) Construct backward difference table for :

x	:	0	1	2	3
y	:	–3	6	8	12

and find $\nabla^2 f(2)$, $\nabla^3 f(3)$.

निम्न के लिए पश्चगामी अन्तर तालिका का निर्माण कीजिए :

x	:	0	1	2	3
y	:	–3	6	8	12

और $\nabla^2 f(2)$, $\nabla^3 f(3)$ ज्ञात कीजिए। 6½,7

(b) Given :

$\sin 0° = 0.0000$, $\sin 10° = 0.1736$,

$\sin 20° = 0.3420$, $\sin 30° = 0.5000$,

$\sin 40° = 0.6428$

Find $\frac{dy}{dx}$ at $x = 10°$ for $y = \sin x$.

दिया है :

$\sin 0° = 0.0000$, $\sin 10° = 0.1736$,

$\sin 20° = 0.3420$, $\sin 30° = 0.5000$,

$\sin 40° = 0.6428$

$y = \sin x$ के लिए $x = 10°$ पर $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। 6½,7

Unit–IV

(इकाई–IV)

8. (a) Evaluate $\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ trapezoidal rule with $h = 0.25$.

$h = 0.25$ के साथ $\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ समलम्बाकार नियम का मूल्यांकन कीजिए।

(b) Evaluate $\int_1^2 (x^3+1)\,dx$ using Simpson's 3/8th rule by taking $n = 6$ and compare the result by analytical solving the integral.

$n = 6$ लेकर सिम्पसन के 3/8 नियम का उपयोग करते हुए $\int_1^2 (x^3+1)\,dx$ का मूल्यांकन कीजिए और समाकल को विश्लेषणात्मक रूप से हल करके परिणाम की तुलना कीजिए। 6½,7

9. (a) Evaluate $\int_0^5 \frac{dx}{4x+5}$ by using Simpson's 1/3rd rule with 10 sub-intervals.

सिम्पसन के 1/3 नियम का उपयोग करते हुए 10 उप-अंतराल के साथ $\int_0^5 \frac{dx}{4x+5}$ का मूल्यांकन कीजिए।

(b) Solve :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{y+x}, \quad y(0)=1$$

taking $h = 0.02$ at $x = 0.1$ by Euler's method.

यूलर विधि द्वारा $x = 0.1$ पर $h = 0.02$ लेते हुए $\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{y+x}, \quad y(0)=1$ को हल कीजिए। 6½,7

Roll No. ....

Total No. of Questions : 9] [Total No. of Printed Pages : 8

(2093)

UG (CBCS) IIIrd Year (Suppl.) Examination

2339

B.A./B.Sc. MATHEMATICS

(Linear Algebra)

(DSE-3A.3)

Paper : MATH303TH

Time : 3 Hours] **[Maximum Marks : 70**

Note :– Attempt *five* questions in all. Section–A (Question No. 1) is compulsory. Attempt *four* questions from Section–B, by selecting *one* question each from the Units–I, II, III and IV. Marks are indicated against each question.

कुल पाँच प्रश्नों को हल कीजिए। खण्ड–अ (प्रश्न संख्या 1) अनिवार्य है। खण्ड–ब की प्रत्येक इकाई I, II, III व IV में से एक-एक प्रश्न का चुनाव करते हुए, चार प्रश्न हल कीजिए। प्रश्नों के अंक उनके सामने अंकित हैं।

Section–A (खण्ड–अ)

Compulsory Question (अनिवार्य प्रश्न)

1. (i) If $V = \{(x, y) : x, y \in R\}$. Show that V is not a vector space over R under the operations :

$$(x, y) + (z, t) = (x, y)$$

and $$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

यदि $V = \{(x, y) : x, y \in R\}$ दर्शाइए कि V संचालन :

$$(x, y) + (z, t) = (x, y)$$

और $$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

के तहत R के ऊपर एक सदिश स्थल नहीं है।

(ii) Define complementary subspaces.

पूरक उपस्थलों को परिभाषित कीजिए।

(iii) Find the coordinates of $v = (2, 3)$ relative to an ordered basis $B = \{(1, 0), (1, 1)\}$ of vector space $R^2(R)$.

सदिश स्थल $R^2(R)$ के आदेशित आधार $B = \{(1, 0), (1, 1)\}$ से सम्बन्धित $v = (2, 3)$ के कोऑर्डिनेट निकालिए।

(iv) Prove that the vectors $v_1 = (1, 5, 2)$, $v_2 = (0, 0, 1)$, $v_3 = (1, 1, 0)$ of $V_3(R)$ are linearly independent.

सिद्ध कीजिए कि $V_3(R)$ के सदिश $v_1 = (1, 5, 2)$, $v_2 = (0, 0, 1)$, $v_3 = (1, 1, 0)$ रैखिक स्वतंत्र हैं।

(v) Show that the mapping $T : R^2 \to R$, defined by $T(x, y) = |2x - 3y|$ is not a linear transformation.

दर्शाइए कि $T(x, y) = |2x - 3y|$ द्वारा परिभाषित फलन $T : R^2 \to R$ एक रैखिक रूपान्तरण नहीं है।

(vi) Let $T_1 : R^3 \to R^2$ and $T_2 : R^3 \to R^2$ be two linear transformations defined by $T_1(x, y, z) = (3x + y, z)$ and $T_2(x, y, z) = (-y + z, x - y)$. Compute $3T_1 - T_2 + I$.

माना कि $T_1 : R^3 \to R^2$ और $T_2 : R^3 \to R^2$ दो रैखिक रूपान्तरण हैं, जो $T_1(x, y, z) = (3x + y, z)$ और $T_2(x, y, z) = (-y + z, x - y)$ द्वारा परिभाषित हैं। $3T_1 - T_2 + I$ की गणना कीजिए।

(vii) Prove that zero is an eigen-value of T iff T is singular operator on the vector space V(F).

सिद्ध कीजिए कि शून्य T का एक आइगेन-मान है यदि और केवल यदि T सदिश स्थल V(F) के ऊपर सिंगुलर ऑपरेटर है।

(viii) Prove that a linear transformation $T : V \to W$ is non-singular iff T is one-one.

सिद्ध कीजिए कि रैखिक रूपान्तरण $T : V \to W$ नॉन-सिंगुलर है यदि और केवल यदि T वन-वन है।

$2 \times 8 = 16$

Section–B (खण्ड–ब)

Unit–I (इकाई–I)

2. (a) Prove that the set of real numbers R is a vector space over itself.

सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्या का समुच्चय R अपने ऊपर एक सदिश स्थल है।

(b) If W_1 and W_2 are two subspaces of the vector space V(F). Then prove that $W_1 \cup W_2$ is also a subspace of V(F) iff either $W_1 \subseteq W_2$ or $W_2 \subseteq W_1$.

यदि W_1 और W_2 सदिश स्थल V(F) के दो उपस्थल हैं। तब सिद्ध कीजिए कि $W_1 \cup W_2$ भी V(F) का उपस्थल है यदि और केवल यदि या तो $W_1 \subseteq W_2$ या $W_2 \subseteq W_1$ है। 6½,7

3. (a) Let W be a subspace of the vector space $V = V_3(R)$ generated by {(0, 1, 1), (0, 0, 2)}. Find V/W and its basis.

माना कि W, सदिश स्थल $V = V_3(R)$ का एक उपस्थल है, जोकि {(0, 1, 1), (0, 0, 2)} द्वारा जनित है। V/W एवं इसका आधार ज्ञात कीजिए।

(b) Let W_1 and W_2 be subspaces of a vector space V(F). Prove that $V = W_1 \oplus W_2$ iff :

(i) $V = W_1 + W_2$

(ii) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

माना कि W_1 और W_2 एक सदिश स्थल V(F) के उपस्थल हैं। सिद्ध कीजिए कि $V = W_1 \oplus W_2$ यदि और केवल यदि :

(i) $V = W_1 + W_2$

(ii) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

हैं। 6½,7

Unit–II (इकाई–II)

4. (a) Prove that the linear-span L(*S*) of any subset *S* of a vector-space V(F) is a subspace of V(F).

सिद्ध कीजिए कि एक सदिश–स्थल V(F) के किसी उपसमुच्चय S का रैखिक–अवधि L(S), V(F) का एक उपस्थल है।

(b) Let $v_1 = (2, -1, 0)$, $v_2 = (1, 2, 1)$ and $v_3 = (0, 2, -1)$. Show that v_1, v_2, v_3 are linearly independent. Express (3, 2, 1) as a linear combination of v_1, v_2, v_3.

माना कि $v_1 = (2, -1, 0)$, $v_2 = (1, 2, 1)$ और $v_3 = (0, 2, -1)$ हैं। दर्शाइए कि v_1, v_2, v_3 रैखिक स्वतंत्र हैं। (3, 2, 1) को v_1, v_2, v_3 के रैखिक संयोजन के रूप में अभिव्यक्त कीजिए। 6½,7

5. (a) Find a basis and dimension of the subspace W of R^3 generated by the vectors (1, –1, 1), (8, 4, 2), (2, 2, 0), (3, 9, –3). Also extend this basis of W to a basis of R^3.

सदिश (1, –1, 1), (8, 4, 2), (2, 2, 0), (3, 9, –3) द्वारा उत्पन्न R^3 के उपस्थल W का आधार तथा आयाम ज्ञात कीजिए। W के इस आधार को R^3 के आधार तक सीमाबद्ध कीजिए।

(b) Prove that any two bases of a finite dimensional vector space have same number of elements.

सिद्ध कीजिए कि एक परिमित आयामी सदिश स्थल के किन्हीं दो आधारों में तत्वों की संख्या एकसमान होती है। 6½,7

Unit–III (इकाई–III)

6. (a) If V(F) and W(F) be two vector spaces, then prove that $T : V \to W$ is a linear transformation iff $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$, $\forall u, v \in V$; $\alpha, \beta \in F$.

यदि V(F) और W(F) दो सदिश स्थल हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $T : V \to W$ एक रैखिक रूपान्तरण है यदि और केवल यदि $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$, $\forall u, v \in V$; $\alpha, \beta \in F$।

(b) Find a linear transformation $T : R^3 \to R^3$, whose range space is generated by (1, 2, 3) and (4, 5, 6).

एक रैखिक रूपान्तरण $T : R^3 \rightarrow R^3$ ज्ञात कीजिए, जिसका रेंज स्पेस (1, 2, 3) और (4, 5, 6) द्वारा जनित है। 6½,7

7. (a) Find the matrix representation of $T : R^2 \rightarrow R^2$, defined as $T(x, y) = (3x - 4y, x + 5y)$ with respect to the basis $B = \{(1, 3), (3, 4)\}$.

$T(x, y) = (3x - 4y, x + 5y)$ द्वारा परिभाषित $T : R^2 \rightarrow R^2$ का आधार $B = \{(1, 3), (3, 4)\}$ के सम्बन्ध में मैट्रिक्स प्रतिनिधित्व ज्ञात कीजिए।

(b) Let $T_1 : R^3 \rightarrow R^2$ and $T_2 : R^2 \rightarrow R^2$ be two linear transformations defined as $T_1(x, y, z) = (3x, 4y - z)$ and $T_2(x, y) = (-x, y)$. Compute T_1T_2 and T_2T_1. Is $T_1T_2 = T_2T_1$?

माना कि $T_1(x, y, z) = (3x, 4y - z)$ और $T_2(x, y) = (-x, y)$ द्वारा परिभाषित $T_1 : R^3 \rightarrow R^2$ और $T_2 : R^2 \rightarrow R^2$ दो रैखिक रूपान्तरण हैं। T_1T_2 और T_2T_1 की गणना कीजिए। क्या $T_1T_2 = T_2T_1$ हैं ? 6½,7

Unit–IV (इकाई–IV)

8. (a) Find the dual basis of $B = \{v_1, v_2\}$ of R^2 over R, where $v_1 = (1, 2)$ and $v_2 = (1, 5)$.

R के ऊपर R^2 के $B = \{v_1, v_2\}$ के लिए द्वैध आधार ज्ञात कीजिए, जहाँ $v_1 = (1, 2)$ और $v_2 = (1, 5)$ हैं।

(b) Let T be a linear operator on R^3 defined by $T(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z)$. Show that T is invertible and find T^{-1}.

माना कि R^3 पर T एक रैखिक संकारक है, जो $T(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z)$ द्वारा परिभाषित है। दिखाइए कि T इनवर्टीबल है तथा T^{-1} ज्ञात कीजिए। 6½,7

9. (a) Find all the eigen-values and basis for each eigen-space of the linear operator $T : R^3 \rightarrow R^3$ defined by $T(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$.

रैखिक संकारक $T : R^3 \rightarrow R^3$ जोकि $T(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$ द्वारा परिभाषित है, के प्रत्येक आइगेन-स्थल के लिए सभी आइगेन-मान तथा आधार ज्ञात कीजिए।

(b) Find all the eigen-values and eigen-vectors for the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ के सभी आइगेन-मान तथा आइगेन-सदिश ज्ञात कीजिए। 6½,7

Roll No. ...

Total No. of Questions : 9] [Total No. of Printed Pages : 8

(2093)

UG (CBCS) IInd Year (Suppl.) Examination

2166

B.A./B.Sc. MATHEMATICS

(Algebra)

(Core)

Paper : MATH202TH

Time : 3 Hours] [Maximum Marks : 70

Note :- Attempt *five* questions in all. Attempt *one* question each from the Units–I, II, III and IV of Section–B. Section–A is compulsory.

कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। खण्ड–ब की प्रत्येक इकाई–I, II, III तथा IV से एक–एक प्रश्न का उत्तर दीजिए। खण्ड–अ अनिवार्य है।

Section–A

(खण्ड–अ)

Compulsory Question

(अनिवार्य प्रश्न)

1. (i) Show that set of natural numbers form a monoid under the composition of multiplication.

सिद्ध कीजिए कि प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय गुणन के तहत एक मोनॉइड बनाता है।

(ii) Show that a group in which every element is its own inverse is in abelian group.

सिद्ध कीजिए कि एक समूह जिसमें प्रत्येक तत्व स्वयं का प्रतिलोम है वह एक एबेलियन समूह है।

(iii) How many generators are there of cyclic group of order 10 ?

एक चक्रीय समूह जिसका क्रम 10 है, के कितने जनरेटर हैं ?

(iv) Prove that the identity element of a subgroup is same as the identity element of the group.

सिद्ध कीजिए कि किसी उपसमूह का तत्समक तत्व समूह के तत्समक तत्व के समान होता है।

(v) Define Kernel of Homomorphism.

होमोमॉर्फिज्म के कर्नेल को परिभाषित कीजिए।

(vi) Show that a group G is abelian if the mapping $f : G \to G$, given by $f(x) = x^2 \; \forall \; x \in G$, is a homomorphism.

दिखाइए कि एक समूह G एबेलियन है यदि मानचित्रण $f : G \to G$ जो इस प्रकार है, दिया गया है $f(x) = x^2 \; \forall \; x \in G$, एक समाकारिता है।

(vii) Give an example of ring with zero divisors.

शून्य भाजक वाले रिंग का उदाहरण दीजिए।

(viii) An ideal I of a ring R is a subring of R. Is converse is true ?

रिंग R का आईडीएल I, R का उपरिंग है। क्या विलोम सत्य है ? $2 \times 8 = 16$

Section–B

(खण्ड–ब)

Unit–I

(इकाई–I)

2. (a) Let Q* denotes the set of all rational numbers except 1, then show that Q* forms an infinite abelian group under the operation $\cdot$ defined by $a \cdot b = a + b - ab$ for all $a, b \in Q^*$.

मान लीजिए Q*, 1 को छोड़कर सभी परिमेय संख्याओं के समुच्चय को निरूपित करता है, तो सिद्ध कीजिए कि Q* ऑपरेशन $\cdot$ के तहत, जो इस प्रकार है दिया गया है $a \cdot b = a + b - ab$ सभी $a, b \in Q^*$ के लिए, एक अनंत एबेलियन समूह बनाता है।

(b) Let G be a finite group and let $a \in G$ be an element of order n. Then $a^m = e$ iff n is a divisor of m.

मान लीजिए कि G एक परिमित समूह है और $a \in G$ ऑर्डर n का तत्व है तो $a^m = e$ यदि n, m का भाजक है। 7,6½

3. (a) Find order of each element of group $G = \{(0, 1, 2, 3, 4, 5 +_6)\}$ i.e. composition is addition modulo 6.

समूह $G = \{(0, 1, 2, 3, 4, 5 +_6)\}$ के प्रत्येक तत्व का क्रम खोजें यानी रचना योग मॉड्यूलो 6 है।

(b) If in a group G, $a^5 = e$ and $aba^{-1} = b^2$ for all $a, b \in G$. Prove that if $b \neq e$, then $O(b) = 31$.

यदि एक समूह G में $a^5 = e$ और $aba^{-1} = b^2$ सभी $a, b \in G$ के लिए हो तो सिद्ध कीजिए कि यदि $b \neq e$, तो $O(b) = 31$। 6½,7

Unit–II

(इकाई–II)

4. (a) A non-empty subset H of a group G is a subgroup of G iff $ab^{-1} \in H, \forall a, b \in H$.

समूह G का एक अरिक्त परिमित उपसमुच्चय H एक उपसमूह है यदि $ab^{-1} \in H, \forall a, b \in H$।

(b) If H and K are finite subgroups of a group G, then prove that :

$$O(HK) = \frac{O(H)O(K)}{O(H \cap K)}$$

यदि H और K एक समूह G के परिमित उपसमूह हैं तो सिद्ध कीजिए :

$$O(HK) = \frac{O(H)O(K)}{O(H \cap K)}$$ 7,6½

5. (a) State and prove Lagrange's theorem for finite groups.

परिमित समूहों के लिए लैग्रांज प्रमेय को लिखिए और सिद्ध कीजिए।

(b) Any *two* right (or left) cosets are either disjoint or identical.

कोई भी दो दाएँ (या बाएँ) सहसमुच्चय या तो असंयुक्त या समरूप होते हैं। 7,6½

Unit–III

(इकाई–III)

6. (a) Let N be a normal subgroup of a group G. Show that G/N is an abelian iff for all $x, y \in G$, $xyx^{-1}y^{-1} \in N$.

मान लीजिए कि N, समूह G का एक सामान्य उपसमूह है। सिद्ध कीजिए कि यदि $x, y \in G$, $xyx^{-1}y^{-1} \in N$ तो G/N एक एबेलियन समूह है।

(b) Prove that the intersection of *two* normal subgroups is a normal subgroup.

सिद्ध कीजिए कि दो सामान्य उपसमूहों का प्रतिच्छेदन एक सामान्य उपसमूह होता है। 7,6½

7. (a) The necessary and sufficient condition for a homomorphism of a group G into a group G′ with Kernel K to be an isomorphism is that $K = \{e\}$.

आवश्यक और पर्याप्त शर्त एक समूह G के एक दूसरे समूह G′ का कर्नेल K के साथ एक समरूपता के लिए एक तुल्यकारिता होना वह है, कि $K = \{e\}$।

(b) Prove that a group G is abelian if and only if the mapping $f: G \to G$ defined by $f(x) = x^{-1}$ is an automorphism.

साबित कीजिए कि एक समूह G एबेलियन है यदि और केवल यदि मैपिंग $f: G \to G$, $f(x) = x^{-1}$ द्वारा परिभाषित एक ऑटोमॉर्फिज्म है। 7,6½

Unit–IV

(इकाई–IV)

8. (a) Show that the set of rational numbers Q is a ring under the compositions $\oplus$ and $\otimes$ defined as :

$$a \oplus b = a + b - 1$$

and $a \otimes b = a + b - ab \ \forall \ a, b \in Q$

सिद्ध कीजिए कि परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q, $\oplus$ और $\otimes$ रचनाओं के तहत और रचनाएँ इस प्रकार परिभाषित हैं : $a \oplus b = a + b - 1$ और $a \otimes b = a + b - ab \ \forall \ a, b \in Q$ एक रिंग है।

(b) Prove that every field is an Integral Domain. Is converse true ?

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक फील्ड एक इंटीग्रल डोमेन है। क्या विलोम सत्य है ? 7,6½

9. (a) Let R be a ring and S be a non-empty subset of R. A necessary and sufficient condition that S is subring of R is $\forall\ a, b \in S \Rightarrow a - b, ab \in S$.

मान लीजिए R एक रिंग है और S, R का एक अरिक्त उपसमुच्चय है। S, R की सबरिंग है, के लिए आवश्यक और पर्याप्त शर्त है $\forall\ a, b \in S \Rightarrow a - b, ab \in S$।

(b) Let I_1 and I_2 be two ideals of a ring R. Prove that $I_1 \cup I_2$ is an ideal of R if and only if either $I_1 \subseteq I_2$ or $I_2 \subseteq I_1$.

मान लीजिए I_1 और I_2 एक रिंग R के दो आईडीएल हैं। साबित कीजिए कि $I_1 \cup I_2$, R का एक आईडीएल है यदि और केवल यदि $I_1 \subseteq I_2$ सर $I_2 \subseteq I_1$। 7,6½

Roll No. ....

Total No. of Questions : 9] [Total No. of Printed Pages : 8

(2093)

UG (CBCS) Ist Year (Supple.) Examination

2047

B.A./B.Sc. MATHEMATICS

(Differential Equations)

(Core)

Paper : MATH 102TH

Time : 3 Hours] **[Maximum Marks : 70**

Note :– Attempt *five* questions in all. Select *one* question from each of the Units I, II, III and IV of Section–B. Section–A is compulsory.

कुल **पाँच** प्रश्न कीजिए। इकाई–I, II, III तथा IV खण्ड–ब से **एक-एक** प्रश्न कीजिए। खण्ड–अ अनिवार्य है।

Section–A (खण्ड–अ)

Compulsory Question

(अनिवार्य प्रश्न)

1. (i) Define general linear differential equation of order n.

सामान्य रैखिक अवकल समीकरण की परिभाषा दीजिए जिसका ऑर्डर n हो।

(ii) Solve :

$$x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0$$

हल कीजिए :

$$x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0$$

(iii) Solve :

$$\frac{d^3y}{dx^3} + y = 0$$

हल कीजिए :

$$\frac{d^3y}{dx^3} + y = 0$$

(iv) Evaluate :

$$\frac{1}{(D-3)^2}e^{3x}.\frac{1}{(D-3)^2}e^{3x}$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\frac{1}{(D-3)^2}e^{3x}.\frac{1}{(D-3)^2}e^{3x}$$

(v) Define Cauchy-Euler linear differential equation.

कॉशी-यूलर रैखिक अवकल समीकरण की परिभाषा दीजिए।

(vi) Solve :

$$\frac{adx}{(b-c)yz}=\frac{bdy}{(c-a)zx}=\frac{cdz}{(a-b)xy}$$

हल कीजिए :

$$\frac{adx}{(b-c)yz}=\frac{bdy}{(c-a)zx}=\frac{cdz}{(a-b)xy}$$

(vii) Form a partial differential equation by eliminating a and b from $Z = ax + by + ab$.

$Z = ax + by + ab$ से a और b को विलुप्त करके आंशिक अवकल समीकरण बनाइए।

(viii) Classify the second order partial differential equation :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-6\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

द्वितीय ऑर्डर के आंशिक अवकल समीकरण $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-6\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ को वर्गीकृत कीजिए। 2×8=16

Section–B

(खण्ड–ब)

Unit–I

(इकाई–I)

2. (a) Solve :

$$e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$$

हल कीजिए :

$$e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$$

(b) Solve :

$$y(1 - xy)dx - x(1 + xy)dy = 0$$

हल कीजिए :

$$y(1 - xy)dx - x(1 + xy)dy = 0$$ 6½,7

3. (a) Solve :

$$y = x + p^3$$

where $p = \frac{dy}{dx}$.

हल कीजिए :

$$y = x + p^3$$

जहाँ $p = \frac{dy}{dx}$ है।

(b) Solve :

$$x = y + a \log p; \quad p > 0$$

हल कीजिए :

$$x = y + a \log p; \quad p > 0$$ 6½,7

Unit–II

(इकाई–II)

4. (a) Prove that :

$$\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{1}{f(a)} e^{ax}$$

if $f(a) \neq 0$.

$\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{1}{f(a)} e^{ax}$ को सिद्ध कीजिए यदि $f(a) \neq 0$ ।

(b) Solve :

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = x e^x$$

हल कीजिए :

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = x e^x$$ 6½,7

5. (a) Solve :

$$(D^2 + 3D + 2)y = \sin e^x$$

हल कीजिए :

$$(D^2 + 3D + 2)y = \sin e^x$$

(b) Solve :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 4y = e^x \sin x$$

हल कीजिए :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 4y = e^x \sin x$$ 6½,7

Unit–III

(इकाई–III)

6. (a) Solve the given differential equation by method of variation of parameters :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sec x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

पैरामीटरों की भिन्नता विधि द्वारा :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sec x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

को हल कीजिए।

(b) Solve :

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}+6x^2\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}-4y=(\log x)^2$$

हल कीजिए :

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}+6x^2\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}-4y=(\log x)^2$$ 6½,7

7. (a) Solve :

$$\frac{dx}{z(x+y)}=\frac{dy}{z(x-y)}=\frac{dz}{x^2+y^2}$$

हल कीजिए :

$$\frac{dx}{z(x+y)}=\frac{dy}{z(x-y)}=\frac{dz}{x^2+y^2}$$

(b) Solve :

$$xz^3dx - zdy + 2y\,dz = 0$$

हल कीजिए :

$$xz^3dx - zdy + 2y\,dz = 0$$ 6½,7

Unit–IV

(इकाई–IV)

8. (a) Form a partial differential equation by eliminating arbitrary functions from $Z = f(x^2 - y) + g(x^2 + y)$.

समीकरण $Z = f(x^2 - y) + g(x^2 + y)$ से f और g को विलुप्त करते हुए आंशिक अवकल समीकरण बनाइए।

(b) Solve :

$$x^2p + y^2q + z^2 = 0$$

where $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$

हल कीजिए :

$$x^2p + y^2q + z^2 = 0$$

जहाँ $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ । 6½,7

9. (a) Solve :

$$p + 3q = 5z - \tan(3x - y)$$

हल कीजिए :

$$p + 3q = 5z - \tan(3x - y)$$

(b) Classify the partial differential equation :

$$5\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

आंशिक अवकल समीकरण :

$$5\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

को वर्गीकृत कीजिए। 6½,7

Roll No. ....

Total No. of Questions : 9] [Total No. of Printed Pages : 8

(2112)

UG (CBCS) RUSA IIIrd Semester (Old) (Special Chance) Examination

1773

MATHEMATICS

(Sequences and Series)

(Major/Minor)

Paper : BA/BSCMATH–0305

Time : 3 Hours] **[Maximum Marks : 70**

Note :– Attempt *five* questions in all. Section A is compulsory. Attempt *one* question each from Sections B, C, D and E.

कुल **पाँच** प्रश्नों को हल कीजिए। खण्ड अ अनिवार्य है। खण्ड ब, स, द और इ से **एक-एक** प्रश्न हल कीजिए।

Section–A (खण्ड–अ)

Compulsory Question (अनिवार्य प्रश्न)

1. (A) Do as directed :

निर्देशानुसार हल कीजिए :

(i) The bounds of the sequence $\{(-1)^n\}$ are .... (Fill in the blank)

अनुक्रम $\{(-1)^n\}$ के बाउण्ड्स हैं ....

(रिक्त स्थान भरिये)

(ii) If $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$, where $|l| < 1$, then

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ = ... (Fill in the blank)

यदि $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$, जहाँ $|l| < 1$, तो

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ = ...। (रिक्त स्थान भरिये)

(iii) Define Cauchy Sequence.

कॉशी अनुक्रम को परिभाषित कीजिए।

(iv) Every convergent sequence is a Cauchy Sequence. (True/False)

प्रत्येक कनवरजेंट क्रम एक कॉशी अनुक्रम है।

(सत्य/असत्य)

(v) If $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent, then

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ = ... (Fill in the blank)

यदि $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ कनवरजेंट है, तो

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ = ...। (रिक्त स्थान भरिये)

(vi) Define Null Sequence.

शून्य अनुक्रम को परिभाषित कीजिए।

(vii) The series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, p \leq 1$ is convergent.

(True/False)

श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, p \leq 1$ कनवरजेंट है।

(सत्य/असत्य)

(viii) Show that $\sum \frac{1}{3n-1}$ is divergent.

दर्शाइये कि $\sum \frac{1}{3n-1}$ डाइवरजेंट है।

(ix) State D'Alembert's Ratio Test.

डी' एलेम्बर्ट के अनुपात परीक्षण को बताइए।

(x) If the partial sums of the series $\sum a_n$ are .... and if $\{b_n\}$ is monotonic sequence converges to ...., then $\sum a_n b_n$ is convergent.

यदि श्रेणी $\sum a_n$ के आंशिक योग .... हैं और यदि $\{b_n\}$ एक मोनोटोनिक अनुक्रम है .... के लिए अभिसरित होता है, तो $\sum a_n b_n$ कनवरजेंट है। (रिक्त स्थान भरिये)

10×1=10

(B) Attempt all the questions :

सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) Prove that, if a sequence is convergent, then it converges to a unique limit.

सिद्ध कीजिए कि यदि एक अनुक्रम करवरजेंट है, तो यह एक अद्वितीय सीमा तक अभिसरित होता है।

(ii) If $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ are two convergent sequences and $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, then prove that $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

यदि $\{a_n\}$ तथा $\{b_n\}$ दो कनवरजेंट अनुक्रम हैं, और $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, तो सिद्ध कीजिए कि $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ ।

(iii) If $\sum a_n$ is convergent, then prove that :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

यदि $\sum a_n$ कन्वरजेंट है, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(iv) Prove that $\sum\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ is divergent.

सिद्ध कीजिए कि $\sum\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ डाइवर्जेंट है।

(v) Show that $\sum \frac{x^n}{n!}$ converges absolutely for all x.

दर्शाइए कि $\sum \frac{x^n}{n!}$ सभी x के लिए पूरी तरह से अभिसरित होता है। 5×4=20

Section–B (खण्ड–ब)

2. (a) Prove that, if $a_n \to l$, then $x_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n} \to l$.

सिद्ध कीजिए कि यदि $a_n \to l$ तो $x_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n} \to l$।

(b) Prove that :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right) = 0$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right) = 0$$

5,5

3. (a) Prove that sequence $\{a_n\}$, where $a_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}$ is convergent.

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\{a_n\}$, जहाँ $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$, कन्वर्जेंट होता है।

(b) Prove that Cauchy sequence is always convergent.

सिद्ध कीजिए कि कॉशी अनुक्रम हमेशा कन्वर्जेंट होता है। 5,5

Section–C (खण्ड–स)

4. (a) Apply Cauchy's criterion to prove the convergence of the series $\sum \frac{1}{n^2}$.

श्रेणी $\sum \frac{1}{n^2}$ के कन्वर्जेंस को सिद्ध करने के लिए कॉशी निकष का प्रयोग कीजिए।

(b) Show that the series $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2n^{-1}}$ + ... converges to the sum 2.

दर्शाइये कि श्रेणी $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2n^{-1}}$ + ... योग 2 तक कन्वर्ज होता है। 5,5

5. (a) Discuss the convergence or divergence of the series $\frac{1}{1.2.3} + \frac{3}{2.3.4} + \frac{5}{3.4.5} + \dots$

श्रेणी $\frac{1}{1.2.3} + \frac{3}{2.3.4} + \frac{5}{3.4.5} + \dots$ के कन्वर्जेंस

अथवा डाइवर्जेंस का वर्णन कीजिए।

(b) Discuss the convergence or divergence of the series $\sum\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$.

श्रेणी $\sum\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ के कन्वर्जेंस अथवा डाइवर्जेंस का वर्णन कीजिए। 5,5

Section–D (खण्ड–द)

6. (a) Examine the convergence or divergence of the series $\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{x^2}{3\sqrt{2}}+\frac{x^4}{4\sqrt{3}}+\frac{x^6}{5\sqrt{4}}+\ldots\ldots$.

श्रेणी $\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{x^2}{3\sqrt{2}}+\frac{x^4}{4\sqrt{3}}+\frac{x^6}{5\sqrt{4}}+\ldots\ldots$ के कन्वर्जेंस अथवा डाइवर्जेंस का परीक्षण कीजिए।

(b) Discuss convergence or divergence of the series $1+\frac{4}{5}x+\frac{4.6}{5.7}x^2+\frac{4.6.8}{5.7.9}x^3+\ldots\ldots$.

श्रेणी $1+\frac{4}{5}x+\frac{4.6}{5.7}x^2+\frac{4.6.8}{5.7.9}x^3+\ldots\ldots$ के कन्वर्जेंस अथवा डाइवर्जेंस का वर्णन कीजिए। 5,5

7. (a) Discuss the convergence of the series $\sum\frac{(n!)^2}{2n!}x^n,\ x>0$.

श्रेणी $\sum\frac{(n!)^2}{2n!}x^n,\ x>0$ के कन्वर्जेंस का वर्णन कीजिए।

(b) Using Cauchy's Integral Test, discuss the convergence or divergence of the series

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}, p > 0.$

कॉंशी समाकलन टेस्ट का उपयोग करते हुए श्रेणी

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}, p > 0$ के कन्वर्जेंस अथवा डाइवर्जेंस का वर्णन कीजिए। 5,5

Section–E (खण्ड–इ)

8. (a) Show that the alternating series $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ is convergent.

दर्शाइये कि वैकल्पिक श्रेणी $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ कन्वर्जेंट है।

(b) State and prove Leibnitz Test.

लाइब्नित्ज परीक्षण सिद्ध करके वर्णन कीजिए। 5,5

9. (a) Discuss the convergence of the series

$\sum\frac{\cos n\theta}{n^p}, p>0.$

श्रेणी $\sum\frac{\cos n\theta}{n^p}, p>0$ के कन्वर्जेंस का वर्णन कीजिए।

(b) By multiplication of series, prove that $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

श्रेणी के गुणन से सिद्ध कीजिए कि $\sin 2x = 2\sin x\cos x$। 5,5

Roll No. ....

Total No. of Questions : 9] [Total No. of Printed Pages : 15

(2111)

UGC (CBCS) Vth Semester (New) Examination

1605

B.A./B.Sc. MATHEMATICS

(Probability and Statistics)

(SEC)

MATH 504

Time : 3 Hours] [Maximum Marks : { Regular : 70, ICDEOL : 100

Note :– Attempt *five* questions in all. Section–A is compulsory and from Section–B attempt *one* question from each of the Units-I, II, III and IV.

कुल पाँच प्रश्न कीजिए। खण्ड-अ अनिवार्य है तथा खण्ड-ब से प्रत्येक इकाई-I, II, III तथा IV से एक-एक प्रश्न कीजिए।

Section–A

(खण्ड–अ)

Compulsory Question

(अनिवार्य प्रश्न)

1. (i) Prove that if F is the distribution function of random variable x, then $F(x) \le F(y)$ if $x < y$.

सिद्ध कीजिए कि यदि F यादृच्छिक चर x का वितरण फलन है, तो $F(x) \le F(y)$ यदि $x < y$.

(ii) Find the constant C s.t. the function :

$$f(x) = \begin{cases} Cx^2, & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

is a density function.

स्थिरांक C ज्ञात कीजिए, शर्त है कि फलन :

$$f(x) = \begin{cases} Cx^2, & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

एक घनत्व फलन है।

If X is a random variable and a, b are constants, then prove that :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

यदि X एक यादृच्छिक चर तथा a, b स्थिरांक हैं, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

(iv) Let Y = 3X − 5 and E(X) = 4, Var(X) = 2. What is the mean and variance of Y ?

माना Y = 3X − 5 और E(X) = 4, Var(X) = 2 है। Y का माध्य और भिन्नता क्या है ?

(v) With the usual notations, find P for a binomial variate X, if n = 6 and 9P(X = 4) = P(X = 2).

सामान्य नोटेशन के साथ द्विपदीय चर X ज्ञात कीजिए, यदि n = 6 तथा 9P(X = 4) = P(X = 2)।

(vi) The mean and variance of a binomial variate X with parameters n and P are 16 and 8. Find $P(X \geq 2)$.

पैरामीटर n तथा P सहित द्विपदीय चर X का माध्य तथा भिन्नता 16 तथा 8 हैं। $P(X \geq 2)$ ज्ञात कीजिए।

(vii) If X is a Poisson variate such that $P(X = 1) = 2P(X = 2)$, find $P(X = 0)$ and $E(X)$.

यदि X एक प्वासां चर है इस प्रकार कि $P(X = 1) = 2P(X = 2)$, तो ज्ञात कीजिए $P(X = 0)$ तथा $E(X)$।

(viii) Prove that :

$$\text{Cov.}(aX, bY) = ab\ \text{Cov.}(X, Y)$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\text{Cov.}(aX, bY) = ab\ \text{Cov.}(X, Y)$$

2×8=16
(8×3=24)

Section–B

(खण्ड–ब)

Unit–I

(इकाई–I)

2. (a) Suppose that the p.d.f. in a random variable X is as follows :

$$f(x)=\begin{cases} Cx^2 , & 1\le x\le 2 \\ 0 , & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Find the value of the constant C and P(X > 3/2).

कल्पना कीजिए कि एक यादृच्छिक चर X में p.d.f. निम्न प्रकार है :

$$f(x)=\begin{cases} Cx^2 , & 1\le x\le 2 \\ 0 , & \text{elsewhere} \end{cases}$$

स्थिरांक C तथा P(X > 3/2) का मान ज्ञात कीजिए।

(b) Test, if following is a probability density function :

$$f(x)=\begin{cases} x & , \quad 0 \le x < 1 \\ 2x & , \quad 1 \le x < 2 \end{cases}$$

परीक्षण कीजिए, यदि निम्नलिखित एक प्रायिकता घनत्व फलन है :

$$f(x)=\begin{cases} x & , \quad 0 \le x < 1 \\ 2x & , \quad 1 \le x < 2 \end{cases}$$ 7,6½(10,9)

3. (a) A random variable X has the following density function :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{k}{1+x^2} & \text{if } -\infty < x < \infty \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Find k and the distributive function.

एक यादृच्छिक चर X में निम्नलिखित घनत्व फलन है :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{1+x^2} & \text{if } -\infty < x < \infty \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

k तथा वितरण फलन ज्ञात कीजिए।

(b) If $f(x) = Cx^2$, $0 < x < 1$ is the p.d.f. of a continuous random variable X, find constant C and a, b, s.t. $P(X \le a) = P(X > a)$ and $P(X > b) = 0.05$.

यदि $f(x) = Cx^2$, $0 < x < 1$ सतत् यादृच्छिक चर X का p.d.f. है तो स्थिरांक C तथा a, b ज्ञात कीजिए शर्त है कि $P(X \le a) = P(X > a)$ तथा $P(X > b) = 0.05$।

7,6½(10,9)

Unit–II

(इकाई–II)

4. (a) Let X has the p.d.f. :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x-1) & , \text{ if } -1<x<1 \\ 0 & , \text{ otherwise}\end{cases}$$

Find the mean and variance of X.

माना कि X में p.d.f. :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x-1) & , \text{ if } -1<x<1 \\ 0 & , \text{ otherwise}\end{cases}$$

है, तो X का माध्य और भिन्नता ज्ञात कीजिए।

(b) If X is random variable s.t. E(X) = 10, V(X) = 25, find the positive numbers a and b s.t. Y = aX – b has means zero and variance 1.

यदि X यादृच्छिक चर है शर्त है कि E(X) = 10, V(X) = 25, धनात्मक संख्या a तथा b ज्ञात कीजिए। शर्त है कि Y = aX − b का अर्थ शून्य तथा क्चिरण 1 है। 7,6½(10,9)

5. (a) For the discrete uniform distribution :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{for} \quad x = 1, 2, \ldots\ldots. k \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Find the m.g.f. and hence find μ_1' and μ_2.

असतत् समान वितरण :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{for} \quad x = 1, 2, \ldots\ldots. k \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

के लिए m.g.f. ज्ञात कीजिए तथा μ_1' तथा μ_2 भी ज्ञात कीजिए।

(b) Let :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1<x<2\\ 0, & \text{elsewhere}\end{cases}$$

be the p.d.f. of random variable X. Show that m.g.f. of X is :

$$M(t)=\begin{cases}\frac{e^{2t}-e^{-t}}{3t}, & t\neq 0\\ 1, & t=0\end{cases}$$

माना कि :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1<x<2\\ 0, & \text{elsewhere}\end{cases}$$

यादृच्छिक चर X का p.d.f. है। दर्शाइए कि X का m.g.f. :

$$M(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{2t} - e^{-t}}{3t} & , \quad t \neq 0 \\ 1 & , \quad t = 0 \end{cases}$$

है। 7,6½(10,9)

Unit–III

(इकाई–III)

6. (a) The probability of man hitting a target is $\frac{1}{4}$. He fires 7 times. What is the probability of his hitting at least twice the target ?

व्यक्ति के लक्ष्य भेदने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है। उसने 7 बार निशाना लगाया। लक्ष्य को भेदने की कम से कम दो बार आने की प्रायिकता क्या है ?

(b) The mean and variance of a binomial distribution are 4 and $\frac{4}{3}$. Find $P(X \geq 1)$.

द्विपद वितरण का माध्य और विचरण 4 और $\frac{4}{3}$ है। $P(X \geq 1)$ ज्ञात कीजिए। 7,6½(10,9)

7. (a) If X is uniformly distributed with mean $\frac{1}{2}$ and variance $\frac{25}{12}$, find $P(X > 0)$ and $P(X < 1)$.

यदि X का माध्य $\frac{1}{2}$ तथा विचरण $\frac{25}{12}$ के साथ एक समान रूप से वितरण किया जाता है तो $P(X > 0)$ तथा $P(X < 1)$ ज्ञात कीजिए।

(b) If X is a normal variate with mean μ and variance $\sigma^2 > 0$, then show that a new random variable Z defined by $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ is a variate with mean 0 and variance 1. Also find the m.g.f. of Z.

यदि X माध्य μ तथा विचरण $\sigma^2 > 0$ के साथ एक सामान्य वेरिएट है तो दर्शाइए कि $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ द्वारा परिभाषित एक नया यादृच्छिक चर Z माध्य 0 तथा विचरण 1 के साथ एक वेरिएट है। Z का m.g.f. भी ज्ञात कीजिए।

7,6½(10,9)

Unit–IV

(इकाई–IV)

8\. (a) For what value of k the function $f(x, y) = kx(x - y)$ for $0 < x < 1, -x < y < x$ is a joint p.d.f. Also, find both the marginal probability density function.

k के किस मान के लिए फलन $f(x, y) = kx(x - y)$ for $0 < x < 1, -x < y < x$ एक संयुक्त p.d.f. है ? दोनों सीमांत प्रायिकता घनत्व फलन भी ज्ञात कीजिए।

(b) For what value of k, $f(x, y)$ represent the joint p.d.f. of two random variables X and Y, where :

$$f(x,y)=\begin{cases} k\,(4-2x+y), & 0<x<3,\ 2<y<4 \\ 0 \quad , & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Also, find $P(x < 2 \wedge y < 3)$.

k के किस मान के लिए $f(x, y)$ दो यादृच्छिक चर X तथा Y का संयुक्त p.d.f. प्रदर्शित करता है, जहाँ :

$$f(x,y)=\begin{cases} k\,(4-2x+y), & 0<x<3,\ 2<y<4 \\ 0 \quad , & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$P(x < 2 \wedge y < 3)$ को भी ज्ञात कीजिए। 7,6½(10,9)

9. (a) Let :

$$f(x,y)=\begin{cases} 8xy & , \ 0<x<y<1 \\ 0 & , \ \text{elsewhere} \end{cases}$$

Find $E(Y/X = x)$.

माना :

$$f(x,y)=\begin{cases} 8xy & , \quad 0<x<y<1 \\ 0 & , \quad \text{elsewhere} \end{cases}$$

E(Y/X = x) ज्ञात कीजिए। 7,6½(10,9)

(b) The joint p.d.f. of bivariate r.v. (X, Y) is given by :

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} 6xy(2-x-y): & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0 \quad , & \text{otherwise} \end{cases}$$

Find conditional expectation of X, given Y = y where $0 < y < 1$.

बाइवेरिएट r.v. (X, Y) का संयुक्त p.d.f. :

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} 6xy(2-x-y): & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0 \quad , & \text{otherwise} \end{cases}$$

द्वारा दिया गया है। X की सशर्त प्रत्याशा ज्ञात कीजिए, दिया है Y = y जहाँ $0 < y < 1$। 7,6½(10,9)

Roll No. ....

Total No. of Questions : 9] [Total No. of Printed Pages : 8

(2111)

UGC (CBCS) Vth Semester (New) Examination

1604

B.A./B.Sc. MATHEMATICS

(Linear Algebra)

(DSE)

MATH 503

Time : 3 Hours] **[Maximum Marks : { Regular = 70, ICDEOL = 100**

Note :– Section–A is compulsory. In Section–B attempt *one* question from each of the Units I, II, III and IV. Marks for ICDEOL given in brackets.

खण्ड–अ अनिवार्य है। खण्ड–ब में प्रत्येक इकाई I, II, III तथा IV से एक-एक प्रश्न कीजिए। ICDEOL के अंक कोष्ठक में दिए गए हैं।

Section–A

(खण्ड–अ)

Compulsory Question

(अनिवार्य प्रश्न)

1. (i) Let A be a non-empty set. Define binary composition on set A.

माना कि A एक अरिक्त समुच्चय है। समुच्चय A पर बाइनरी कम्पोजीशन परिभाषित कीजिए।

(ii) Define linear combination of vectors.

वेक्टरों के रैखिक कम्पोजीशन को परिभाषित कीजिए।

(iii) What is the direct sum of *two* subspaces.

दो सब स्पेसों का प्रत्यक्ष योग क्या है ?

(iv) Let V be a vector space. What is a basis of V ?

माना V एक वेक्टर स्पेस है। V का आधार क्या है ?

(v) Give the statement of Rank-Nullity Theorem.

कोटि–शून्यता प्रमेय का कथन लिखिए।

(vi) What do you mean by singular transformation ?

सिंगुलर ट्रांसफॉर्मेशन से आपका क्या अभिप्राय है ?

(vii) What is the difference between eigen value and eigen vector of linear operator ?

रैखिक ऑपरेटर के आइगेन मान तथा आइगेन वेक्टर में क्या अन्तर है ?

(viii) Define Kernel of a linear transformation.

एक रैखिक ट्रांसफॉर्मेशन के Kernel (कर्नेल) को परिभाषित कीजिए। 2×8=16 (2½×8=20)

Section–B

(खण्ड–ब)

Unit–I

(इकाई–I)

2. (a) Prove that a non-empty subset W of a vector space V(F) is a subspace of V iff W is closed under addition and scalar multiplication.

सिद्ध कीजिए कि वेक्टर स्पेस V(F) का अरिक्त सब-स्पेस W, V का एक सबस्पेस है यदि और केवल यदि W योग तथा स्केलर गुणा के अंतर्गत संवृत्त है। 6(10)

(b) If w_1 and w_2 are subspaces of vector space V(F), prove that $w_1 + w_2$ is a subspace of V(F).

यदि w_1 तथा w_2 वैक्टर स्पेस V(F) के सबस्पेस हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $w_1 + w_2$, V(F) का एक सबस्पेस है। 7½(10)

3. (a) Prove that the vector $v_1 = (2, 3, 4)$, $v_2 = (1, 0, 0)$ and $v_3 = (0, 1, 0)$ and $v_4 = (0, 0, 0)$ are linearly dependent.

सिद्ध कीजिए कि वेक्टर $v_1 = (2, 3, 4)$, $v_2 = (1, 0, 0)$ तथा $v_3 = (0, 1, 0)$ तथा $v_4 = (0, 0, 0)$ रैखिक स्वतंत्र हैं। 6(10)

(b) Find the value of k so that the vectors :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ are L.D.}$$

k का मान इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि वेक्टर

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ तथा } \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ L.D. हैं।}$$

7½(10)

Unit–II (इकाई–II)

4. (a) Prove that any *two* bases of a finite dimensional vector space have same number of elements.

सिद्ध कीजिए कि एक परिमित आयामी वेक्टर स्पेस के किन्हीं **दो** आधारों में तत्वों की समान संख्या है। 6(10)

(b) Let V be the vector space of all 2 × 2 symmetric matrices over R. Find a basis and the dimension of V.

माना कि V, R के ऊपर सभी 2 × 2 सममितीय मैट्रिक्स वेक्टर स्पेस है, तो V का आधार तथा आयाम ज्ञात कीजिए। 7½(10)

5. (a) Prove that system of vectors $u = (1, 2, -3)$, $v = (1, -3, 2)$ and $w = (2, -1, 5)$ of $V_3(R)$ is L.I.

सिद्ध कीजिए कि $V_3(R)$ के वेक्टर्स $u = (1, 2, -3)$, $v = (1, -3, 2)$ और $w = (2, -1, 5)$ का निकाय L.I. है। 6(10)

(b) Show that the vectors $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (0, 1, 2)$ and $x_3 = (0, 0, 1)$ generate $V_3(R)$.

दर्शाइए कि वेक्टर्स $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (0, 1, 2)$ तथा $x_3 = (0, 0, 1)$, $V_3(R)$ को जनरेट करते हैं। 7½(10)

Unit–III (इकाई-III)

6. (a) Show that $T : R^2 \to R^3$ defined by $T(x, y) = (x + y, x - y, y)$ is a linear transformation.

दर्शाइए कि $T(x, y) = (x + y, x - y, y)$ द्वारा परिभाषित $T : R^2 \to R^3$ एक लाइनियर ट्रांसफॉर्मेशन है। 6(10)

(b) Find a L.T. which transforms $(3, -1, -2)$, $(1, 1, 0)$, $(-2, 0, 2)$ in R^3 to twice the elementary vectors $2e_1$, $2e_2$, $2e_3$ in R^3.

एक L.T. ज्ञात कीजिए जो R^3 में प्राथमिक वेक्टर्स $2e_1$, $2e_2$, $2e_3$ को दो बार R^3 में $(3, -1, -2)$, $(1, 1, 0)$, $(-2, 0, 2)$ को रूपांतर करता है। 7½(10)

7. (a) Let the linear transformation $T : R^3 \rightarrow R^3$ be defined as $T(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z)$. Verify rank nullity theorem for T.

माना कि रैखिक ट्रांसफार्मेशन $T : R^3 \rightarrow R^3$ को $T(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z)$ के रूप में परिभाषित करता है, तो T के लिए कोटि शून्यता प्रमेय सत्यापित कीजिए। 6½(10)

(b) If $T : V(F) \rightarrow V(F)$ be a linear operator. Prove that $T^n : V \rightarrow V$ is a linear operator $\forall n \in N$.

यदि $T : V(F) \rightarrow V(F)$ एक रैखिक ऑपरेटर है तो सिद्ध कीजिए कि $T^n : V \rightarrow V$ एक रैखिक ऑपरेटर $\forall n \in N$ है। 7(10)

Unit–IV (इकाई-IV)

8. (a) Find the dual basis for $B = \{v_1, v_2\}$ of R^2 over R, where $v_1 = (1, 2)$ and $v_2 = (1, 5)$.

$B = \{v_1, v_2\}$ के लिए R^2 के R के ऊपर द्वैध आधार ज्ञात कीजिए जहाँ $v_1 = (1, 2)$ and $v_2 = (1, 5)$. 6(10)

(b) Prove that 0 is an eigenvalue of $n \times n$ matrix A over F iff A is singular.

सिद्ध कीजिए कि 0, F के ऊपर $n \times n$ मैट्रिक्स A का आइगेन मान है यदि और केवल यदि A एक सिंगुलर है। 7½(10)

9. (a) Find all the eigenvalues and eigen vectors for

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ के लिए सभी आइगेन मान तथा आइगेन वैक्टर ज्ञात कीजिए। 6(10)

(b) Diagonalize the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

मैट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ का विकर्ण कीजिए। 7½(10)

Roll No. ....

Total No. of Questions : **9**]   [Total No. of Printed Pages : **8**

(2111)

UGC (CBCS) IIIrd Semester (New) Examination

1488

B.A./B.Sc. MATHEMATICS

(Integral Calculus)

(SEC)

MATH304

Time : 3 Hours]   [**Maximum Marks :** Regular : 70, ICDEOL : 100

Note :– Attempt *five* questions in all. Section–A is compulsory. From Section B, select *one* question from each of the Units I, II, III and IV.

कुल **पाँच** प्रश्नों को हल कीजिए। खण्ड–अ अनिवार्य है। खण्ड ब की प्रत्येक इकाई I, II, III तथा IV से **एक-एक** प्रश्न का चयन कीजिए।

Section–A (खण्ड–अ)

Compulsory Question

(अनिवार्य प्रश्न)

1. (i) A function of the form $\frac{f(x)}{g(x)}$; where $f(x)$, $g(x)$ are the two polynomials in x and $g(x) \neq 0$ is called ....

$\frac{f(x)}{g(x)}$ के रूप का एक फलन; जहाँ $f(x)$, $g(x)$ x में दो बहुपद हैं और $g(x) \neq 0$ कहा जाता है .... ।

(ii) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (True/False)

$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (सत्य/असत्य)

(iii) If $f(x)$ is an odd function, then $\int_{-a}^{a} f(x)dx =$ ....

यदि $f(x)$ एक विषम फलन है तो $\int_{-a}^{a} f(x)dx =$ .... ।

(iv) Evaluate :

$$\int_{-5}^{5} |x-2|\, dx$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_{-5}^{5} |x-2|\, dx$$

(v) By using reduction formula to evaluate :

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$$

अपचयन सूत्र का उपयोग करके मूल्यांकन कीजिए :

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$$

(vi) Value of :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^8 \theta d\theta \text{ ....}$$

मूल्य ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^8 \theta d\theta \text{ ....}$$

(vii) The process of finding the area bounded by a given portion of a curve is called ....

किसी वक्र के किसी दिए गए भांग से घिरा क्षेत्रफल ज्ञात करने की प्रक्रिया कहलाती है ....

(viii) Evaluate :

$$\iint\limits_{\substack{0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1}} (x^2 + y^2) dxdy$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\iint\limits_{\substack{0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1}} (x^2 + y^2) dxdy$$

2×8=16
(3×8=24)

Section–B (खण्ड–ब)

Unit–I (इकाई–I)

2. (a) Evaluate :

$$\int \frac{2x^3+3}{x^2-x-2}\,dx$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\int \frac{2x^3+3}{x^2-x-2}\,dx$$

(b) Integrate :

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+3x-2x^2}}\,dx$$

समाकलन कीजिए :

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+3x-2x^2}}\,dx$$ 6½,7(9,10)

3. (a) Evaluate :

$$\int_0^{\pi} \frac{e^{\cos x}}{e^{\cos x}+e^{-\cos x}}\,dx$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_0^{\pi} \frac{e^{\cos x}}{e^{\cos x}+e^{-\cos x}}\,dx$$

Prove that :

$$\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \cos x} dx = \frac{\pi^2}{4}$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \cos x} dx = \frac{\pi^2}{4}$$

6½,7(9,10)

Unit–II (इकाई–II)

4. (a) Obtain a reduction formula for $I_n = \int x^n \sin x \, dx$ and hence evaluate I_3.

$I_n = \int x^n \sin x \, dx$ के लिए अपचयन सूत्र प्राप्त कीजिए, अत: I_3 का मूल्यांकन कीजिए।

(b) Obtain a reduction formula for $I_{m,n} = \int \cos^m x \cos nx \, dx$ and hence evaluate :

$$\int \cos^3 x \cos 2x \, dx$$

$I_{m,n} = \int \cos^m x \cos nx \, dx$ के लिए अपचयन सूत्र प्राप्त कीजिए, अत: $\int \cos^3 x \cos 2x \, dx$ का मूल्यांकन कीजिए।

6½,7(9,10)

5. (a) Prove that :

$$\int_0^a \frac{x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{3\pi a^2}{16}$$

सिद्ध कीजिए :

$$\int_0^a \frac{x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{3\pi a^2}{16}$$

(b) Evaluate :

$$\int_0^1 x^{3/2} \sqrt{1-x} dx$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_0^1 x^{3/2} \sqrt{1-x} dx$$

6½,7(9,10)

Unit–III (इकाई–III)

6. (a) Find the area of the region bounded by the parabola's $y^2 = 4ax$ and $x^2 = 4ay$; where $a > 0$.

परवलय $y^2 = 4ax$ और $x^2 = 4ay$; से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(b) Find the area of the curve :

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

6½,7(9,10)

7. (a) Find the surface of the solid generated by the revolution of the ellipse $x^2 + 4y^2 = 16$ about its major axis.

दीर्घवृत्त $x^2 + 4y^2 = 16$ के परिक्रमण से उत्पन्न ठोस का पृष्ठ उसके प्रमुख अक्षों के बारे में ज्ञात कीजिए।

(b) Prove that the volume of a sphere of radius a is $\frac{4}{3}\pi a^3$.

सिद्ध कीजिए कि a त्रिज्या वाले एक गोले का आयतन $\frac{4}{3}\pi a^3$ है। 6½,7(9,10)

Unit–IV (इकाई–IV)

8. (a) Find the area bounded by the circle $x^2 + y^2 = a^2$.

वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ से घिरा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(b) Change the order of integration and hence evaluate :

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} xy\, dy\, dx$$

एकीकरण का क्रम बदलिए और इसलिए $\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} xy\, dy\, dx$ का मूल्यांकन कीजिए। 6½,7(9,10)

9. (a) Evaluate :

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1} (z^5+z)\,dx\,dy\,dz$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1} (z^5+z)\,dx\,dy\,dz$$

(b) Evaluate :

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} |\cos(x+y)|\,dx\,dy$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} |\cos(x+y)|\,dx\,dy$$ 6½,7(9,10)

Roll No. ....

Total No. of Questions : 9] [Total No. of Printed Pages : 8

(2111)

UGC (CBCS) IIIrd Semester (New) Examination

1486

B.A./B.Sc. MATHEMATICS

(Real Analysis)

(Core)

MATH301

Time : 3 Hours] [Maximum Marks : Regular : 70, ICDEOL : 100

Note :– Section–A is compulsory. Attempt *one* question from each Unit–I, II, III, IV in Section–B. Marks in brackets are for ICDEOL.

खण्ड–अ अनिवार्य है। खण्ड–ब में प्रत्येक इकाई–I, II, III, IV से एक-एक प्रश्न कीजिए। ICDEOL के अंक कोष्ठक में दिये गये हैं।

Section–A (खण्ड–अ)

Compulsory Question

(अनिवार्य प्रश्न)

1. (i) Show that $\sqrt{ab}$ lies between a and b for $a > b > 0$.

दर्शाइए कि $a > b > 0$ के लिए a और b के बीच $\sqrt{ab}$ है।

(ii) Find the limit point of the set $\left\{\frac{1}{n}; n \in N\right\}$.

सेट $\left\{\frac{1}{n}; n \in N\right\}$ का लिमिट बिन्दु ज्ञात कीजिए।

(iii) Show that the sequence $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ converges to 1.

दर्शाइए कि अनुक्रम $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$, 1 में परिवर्तित होता है।

(iv) Define Cauchy sequence.

कॉशी अनुक्रम को परिभाषित कीजिए।

(v) State Cauchy's Root Test.

कॉशी का मूल परीक्षण का वर्णन कीजिए।

(vi) Examine the convergence or divergence of the series $\sum\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

श्रेणी $\sum\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ का अभिसरण या अपसरण का परीक्षण कीजिए।

(vii) Define uniform convergence of sequence of functions.

फंक्शन के अनुक्रम के एकसमान अभिसरण को परिभाषित कीजिए।

(viii) Find the interval of convergence of the sries :

$$x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\ldots\ldots\ldots$$

श्रेणी $x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\ldots\ldots\ldots$ के अभिसरण का अन्तराल ज्ञात कीजिए।

2×8=16
(2½×8=20)

Section–B (खण्ड–ब)

Unit–I (इकाई–I)

2. (a) Find g.l.b. and l.u.b. of the set :

$$\left\{\frac{2x-1}{x+4};\ |x-5|<2\right\}$$

सेट $\left\{\frac{2x-1}{x+4};\ |x-5|<2\right\}$ के g.l.b. तथा l.u.b. ज्ञात कीजिए।

(b) Solve :

$$2|x| + |x - 1| = 4$$

हल कीजिए :

$$2|x| + |x - 1| = 4$$

7,6½
(10,10)

3. (a) Show that union of two bounded sets is a bounded set. What can you say about its converse ? Justify your answer.

दर्शाइए कि दो परिबद्ध सेटों का यूनियन परिबद्ध सेट होता है। इसके विपर्यय के बारे में आप क्या कह सकते हैं ? निर्णीत उत्तर दीजिए।

(b) Show that :

$$\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)' = \bigcup_{i=1}^{m} A'_i$$

दर्शाइए कि :

$$\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)' = \bigcup_{i=1}^{m} A'_i$$

7,6½
(10,10)

Unit–II (इकाई–II)

4. (a) Show that :

$$\underset{n\to\infty}{\text{Lt}}\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots..+\frac{1}{(n+n)^2}\right]=0$$

दर्शाइए कि :

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots..+\frac{1}{(n+n)^2}\right]=0$$

(b) State and prove Cauchy's second Theorem on limits.

कॉशी की limits पर द्वितीय प्रमेय को सिद्ध कर वर्णन कीजिए। 7,6½

(10,10)

5. (a) Examine the convergence or divergence of the sequence $\left\{\frac{\lfloor 3n}{(\lfloor n)^3}\right\}$.

अनुक्रम $\left\{\frac{\lfloor 3n}{(\lfloor n)^3}\right\}$ का अभिसरण या अपसरण का परीक्षण कीजिए।

(b) Examine the convergence or divergence of the sequence $\{a_n\}$, where :

$$a_n = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots\ldots+\frac{1}{2n+1}$$

अनुक्रम $\{a_n\}$ के अभिसरण या अपसरण का परीक्षण कीजिए, जहाँ :

$$a_n = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots\ldots+\frac{1}{2n+1}$$ 7,6½

(10,10)

Unit–III (इकाई–III)

6. (a) Show that the series $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ is convergent.

दर्शाइए कि श्रेणी $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ अभिसरण होती है।

(b) Discuss the convergence or divergence of the series $\sum \left(\sqrt[3]{n^3+1} - n \right)$.

श्रेणी $\sum \left(\sqrt[3]{n^3+1} - n \right)$ के अभिसरण या अपसरण का वर्णन कीजिए। 7,6½ (10,10)

7. (a) Discuss the convergence or divergence of the series $\sum \frac{x^n}{3^n n^2}$.

श्रेणी $\sum \frac{x^n}{3^n n^2}$ के अभिसरण या अपसरण का वर्णन कीजिए।

(b) Show that :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

दर्शाइए कि :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

7,6½
(10,10)

Unit–IV (इकाई–IV)

8. (a) Show that the sequence of function $\{f_n(x)\}$, where $f_n(x) = \frac{x}{(n+x^2)^2}$ is uniformly convergent for $x \geq 0$.

दर्शाइए कि फंक्शन $\{f_n(x)\}$ का अनुक्रम $x \geq 0$ के लिए एकसमान अभिसरण होता है जहाँ

$$f_n(x) = \frac{x}{(n+x^2)^2}$$ ।

(b) Find the radius of convergence of the series :

$$\frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.5}x^2 + \frac{1.3.5}{2.5.8}x^3 + ...$$

श्रेणी $\frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.5}x^2 + \frac{1.3.5}{2.5.8}x^3 + ...$ के अभिसरण की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

7,6½
(10,10)

9. (a) Show that :

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots\ldots$$

for $-1 \leq x \leq 1$.

दर्शाइए कि :

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots\ldots$$

for $-1 \leq x \leq 1$।

(b) Check the uniform convergence of the series :

$$\frac{1}{(1+x)^4} + \frac{2}{(2+x)^4} + \frac{3}{(3+x)^4} + \ldots\ldots\ldots; \; x \geq 0$$

श्रेणी $\frac{1}{(1+x)^4} + \frac{2}{(2+x)^4} + \frac{3}{(3+x)^4} + \ldots\ldots\ldots;$

$x \geq 0$ के एकसमान अभिसरण की जाँच कीजिए। 7,6½

(10,10)

Roll No. ....

Total No. of Questions : **9**] [Total No. of Printed Pages : **8**

(2043)

UGC (CBCS) VIth Semester (New) Examination

798

B.A./B.Sc. MATHEMATICS

(Complex Analysis)

(DSE)

Paper : MATH 602

Time : 3 Hours] **[Maximum Marks : {70 for Regular, 100 for ICDEOL**

Note :– Attempt *five* questions in all. Section–A (Q.No. **1**) is compulsory and from Section–B attempt *one* question from each of the Units I, II, III and IV.

कुल **पाँच** प्रश्न कीजिए। खण्ड–अ का प्रश्न क्र. 1 अनिवार्य है। खण्ड–ब की इकाई I, II, III तथा IV से **एक–एक** प्रश्न कीजिए।

Section–A (खण्ड–अ)

Compulsory Question (अनिवार्य प्रश्न)

1. (i) If $z = x + iy$, find the absolute value of z.

   यदि $z = x + iy$, तो z का निरपेक्ष मान ज्ञात कीजिए।

   (ii) Prove that $\log N = x + 2n\pi i$, where $e^x = N$ such that N is a +ve real number and x is also real.

   सिद्ध कीजिए कि $\log N = x + 2n\pi i$, जहाँ $e^x = N$ इस प्रकार है कि N एक धनात्मक वास्तविक संख्या है और x भी वास्तविक है।

   (iii) Separate $\log(1 + i)$ into real and imaginary parts.

   $\log(1 + i)$ को वास्तविक और काल्पनिक भागों में विभक्त कीजिए।

   (iv) Define analytic function in a domain.

   एक डोमेन में वैश्लेषिक फलन को परिभाषित कीजिए।

   (v) Write down Cauchy-Riemann equations in polar form.

   कॉची-रीमैन समीकरणों को ध्रुवीय रूप में लिखिए।

   (vi) State Cauchy-Goursat theorem.

   कॉची-गौरसेट प्रमेय को स्पष्ट कीजिए।

   (vii) State Liouville's theorem.

   लिओविले की प्रमेय को बताइए।

(viii) Define simply connected and multiconnected region.

सरल संबद्ध और बहुसंबद्ध क्षेत्र को परिभाषित कीजिए। 2×8=16
(2½×8=20)

Section–B

(खण्ड–ब)

Unit–I

(इकाई–I)

2. (a) If $f(z) = xy^2(x + iy)$, $z \neq 0$; $f(0) = 0$, prove that $\frac{f(z)-f(0)}{z} \to 0$ as $z \to 0$ along any radius vector but not as $z \to 0$ in any manner.

यदि $f(z) = xy^2(x + iy)$, $z \neq 0$; $f(0) = 0$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{f(z)-f(0)}{z} \to 0$ किसी भी त्रिज्या सदिश के साथ $z \to 0$ के रूप में है लेकिन किसी भी तरीके से $z \to 0$ के रूप में नहीं। 6(10)

(b) Show that the function $f(z) = \overline{z}$ is not differentiable at $z = 0$.

सिद्ध कीजिए कि फलन $f(z) = \overline{z}$, $z = 0$ पर अवकलनीय नहीं है। 7½(10)

3. (a) Prove that :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\partial v}{\partial x}$$

सिद्ध कीजिए :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\partial v}{\partial x}$$ 6(10)

(b) Let :

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y(y - ix)}{x^6 + y^2}, & z \neq 0 \\ 0 \quad , & z = 0 \end{cases}$$

Show that $f(z)$ satisfies Cauchy-Riemann equations at $z = 0$.

माना

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y(y - ix)}{x^6 + y^2}, & z \neq 0 \\ 0 \quad , & z = 0 \end{cases}$$

दर्शाइए कि $f(z)$, $z = 0$ पर कौशी-रीमैन समीकरणों को संतुष्ट करता है। 7½(10)

Unit–II

(इकाई–II)

4. (a) If :

$$u+v=\frac{2\sin 2x}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}$$

and $f(z) = u + iv$

is analytic function of $z = x + iy$, find $f(z)$ in term of z.

यदि

$$u+v=\frac{2\sin 2x}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}$$

और $f(z) = u + iv$

$z = x + iy$ का वैश्लेषिक फलन है, तो z के पद में $f(z)$ ज्ञात कीजिए। 6(10)

(b) Prove that :

$$\tan\left(i\log\frac{a-ib}{a+ib}\right)=\frac{2ab}{a^2-b^2}$$

सिद्ध कीजिए :

$$\tan\left(i\log\frac{a-ib}{a+ib}\right)=\frac{2ab}{a^2-b^2}$$

7½(10)

5. (a) Find an analytic function whose real part is $e^x \cos y$.

एक वैश्लेषिक फलन ज्ञात कीजिए जिसका वास्तविक भाग $e^x \cos y$ है। 6(10)

(b) Separate $\log\left(\frac{3-i}{3+i}\right)$ into real and imaginary parts.

$\log\left(\frac{3-i}{3+i}\right)$ को वास्तविक और काल्पनिक भागों में विभाजित कीजिए। 7½(10)

Unit–III

(इकाई–III)

6. (a) Using Cauchy integral formula evaluate :

$$\int \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz .$$

कौशी समाकल सूत्र का प्रयोग करके निम्न का मूल्यांकन कीजिए :

$$\int \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz .$$ 6(10)

(b) If a function $f(z)$ is analytic within and on a closed contour C and a is any point lying in it, then :

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz \cdot$$

यदि एक फलन $f(z)$ एक आबद्ध समोच्च C के भीतर और उस पर वैश्लेषिक है तथा a कोई बिन्दु इसमें है, तो :

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz \cdot$$ 7½(10)

7. (a) State and prove Cauchy integral theorem.

कौशी समाकल प्रमेय को स्पष्ट और सिद्ध कीजिए। 6(10)

(b) Evaluate :

$$\int_C \frac{dz}{z-2},$$

where C is the circle $|z| = 3$, using Cauchy integral formula.

कौशी समाकल सूत्र का प्रयोग करते हुए $\int_C \frac{dz}{z-2}$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ C वृत्त $|z| = 3$ है। 7½(10)

Unit–IV

(इकाई–IV)

8. (a) State and prove Liouville's theorem.

लिओविले के प्रमेय को बताइए और सिद्ध कीजिए। 6(10)

(b) Find the region of convergence of series :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

शृंखला $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$ के अभिसरण का क्षेत्र ज्ञात कीजिए। 7½(10)

9. (a) Expand sin z about $z = \frac{\pi}{4}$ in a Taylor's series.

टेलर की शृंखला में $z = \frac{\pi}{4}$ के चारों ओर sin z का प्रसार कीजिए। 6(10)

(b) Find the Laurent series for $\frac{1}{z(z-1)(z-2)}$; for $|z| > 2$.

$|z| > 2$ के लिए $\frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ के लिए लॉरेंट शृंखला ज्ञात कीजिए। 7½(10)

Roll No. ....

Total No. of Questions : 9] [Total No. of Printed Pages : 8

(2102)

UGC (CBCS) IIIrd Semester (New) Examination

481

B.A./B.Sc. MATHEMATICS

Integral Calculus

(SEC)

MATH304

Time : 3 Hours] **[Maximum Marks : {Regular : 70, ICDEOL : 100}**

Note :– Attempt *five* questions in all. Section–A is compulsory. From Section–B, select *one* question from each of the Units I, II, III and IV.

कुल **पाँच** प्रश्नों को हल कीजिए। खण्ड–अ अनिवार्य है। खण्ड–ब की प्रत्येक इकाई I, II, III तथा IV से **एक-एक** प्रश्न का चयन कीजिए।

Section–A (खण्ड–अ)

Compulsory Question

(अनिवार्य प्रश्न)

1. (i) Evaluate :

$$\int \frac{1}{x^2-2x-3}dx$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\int \frac{1}{x^2-2x-3}dx$$

(ii) Evaluate :

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$$

(iii) Prove that :

$$\int_0^{\pi/2} \log \tan x \, dx = 0$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^{\pi/2} \log \tan x \, dx = 0$$

(iv) Find the area of the region bounded by $y^2 = x^2 - x + 2$, x-axis and the lines $x = 0$ and $x = 3$.

$y^2 = x^2 - x + 2$, x-अक्ष और रेखाओं $x = 0$ और $x = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(v) Evaluate :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta \, d\theta$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta \, d\theta$$

(vi) Find reduction formula for $\int x^n e^{3x} \, dx$.

$\int x^n e^{3x} \, dx$ के लिए अपचयन सूत्र ज्ञात कीजिए।

(vii) The process of finding the area bounded by a given portion of a curve is called ....

किसी वक्र के किसी दिए गए भाग से घिरा क्षेत्रफल ज्ञात करने की प्रक्रिया कहलाती है ....

(viii) Evaluate :

$$\iint\limits_{\substack{0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1}} (x^2 + y^2) \, dx dy$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\iint\limits_{\substack{0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1}} (x^2 + y^2) \, dx dy$$

2×8=16
(3×8=24)

Section–B (खण्ड–ब)

Unit–I (इकाई–I)

2. (a) Evaluate :

$$\int \frac{1}{\sin x(1+2\cos x)}\,dx$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\int \frac{1}{\sin x(1+2\cos x)}\,dx$$

(b) Integrate :

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-1}}\,dx$$

समाकलन कीजिए :

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-1}}\,dx$$

6½,7(9,10)

3. (a) Integrate :

$$\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+6x+7}}\,dx$$

समाकलन कीजिए :

$$\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+6x+7}}\,dx$$

(b) Evaluate :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\, dx$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\, dx$$ 6½,7(9,10)

Unit–II (इकाई–II)

4. (a) Obtain a reduction formula for $I_{m,n} = \int x^m (\log x)^n \, dx$. Hence evaluate $\int x^4 (\log x)^3 \, dx$.

$I_{m,n} = \int x^m (\log x)^n \, dx$ के लिए अपचयन सूत्र प्राप्त कीजिए। अतः $\int x^4 (\log x)^3 \, dx$ का मूल्यांकन कीजिए।

(b) If :

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x \, dx,$$

show that :

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}$$

यदि :

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

तो सिद्ध कीजिए कि :

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}$$ 6½,7(9,10)

5. (a) Evaluate :

$$\int \sin^4 x \, dx$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\int \sin^4 x \, dx$$

(b) Write down the value of $\int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta - \cos^4 \theta \, d\theta$.

$\int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta - \cos^4 \theta \, d\theta$ का मूल्य लिखिए। 6½,7(9,10)

Unit–III (इकाई–III)

6. (a) Find the length of the curve $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, on $[0, 2\pi]$.

वक्र की लम्बाई ज्ञात कीजिए $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $[0, 2\pi]$ पर।

(b) Find the area of the region bounded by the curve $y = x^2 + 1$, $y = x$, $x = 0$ and $y = 2$.

वक्र $y = x^2 + 1$, $y = x$, $x = 0$ और $y = 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 6½,7(9,10)

7. (a) Find the total area of the curve

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

where $a > 0, b > 0$.

वक्र

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

का कुल क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जहाँ $a > 0, b > 0$.

(b) Find the area of the surface formed by the revolution of $y^2 = 4ax$ about the x-axis by the arc from the vertex to one end of the latus rectum.

शीर्ष से लेटस रेक्टम के एक छोर तक चाप द्वारा x-अक्ष के परित: $y^2 = 4\,ax$ के परिक्रमण से बनने वाले पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 6½,7(9,10)

Unit–IV (इकाई–IV)

8. (a) Evaluate :

$$\int_1^2\int_0^3 (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_1^2 \int_0^3 (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

(b) Evaluate $\iint_A x\, dx\, dy$; where A is region bounded by Parabola's $y^2 = 4ax$ and $x^2 = 4ay$.

मूल्यांकन कीजिए $\iint_A x\, dx\, dy$; जहाँ A, $y^2 = 4ax$ और $x^2 = 4ay$ परवलयों से घिरा क्षेत्र है। 6½,7(9,10)

9. (a) Evaluate :

$$\iiint_R (ax^2 + by^2 + cz^2) dx\, dy\, dz$$

where R is the region $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

मूल्यांकन कीजिए :

$$\iiint_R (ax^2 + by^2 + cz^2) dx\, dy\, dz$$

जहाँ R क्षेत्र है $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

(b) Find the area of the cricle using double integration.

दोहरे एकीकरण का उपयोग करके वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 6½,7(9,10)

Roll No. ....

Total No. of Questions : 9] [Total No. of Printed Pages : 8

(2042)

UGC (CBCS) IVth Semester (New) Examination

186

B.A./B.Sc. MATHEMATICS

(Algebra)

(Core)

Paper : MATH-401

Time : 3 Hours] [Maximum Marks : 70 for Regular / 100 for ICDEOL

Note :– Attempt *five* questions in all. Section–A is compulsory. Select *one* question from each of the Units I, II, III and IV in Section–B. Marks for ICDEOL are given in the brackets.

कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। खण्ड-अ अनिवार्य है। खण्ड-ब की प्रत्येक इकाई I, II, III व IV से **एक-एक** प्रश्न का चयन करते हुए उत्तर दीजिए। ICDEOL के अंक कोष्ठक में दिये गये हैं।

Section–A (खण्ड–अ)

Compulsory Question

(अनिवार्य प्रश्न)

1. (i) Show that the set of all natural numbers form a semi-group under the composition of addition.

दर्शाइए कि योग की संरचना के अंतर्गत सभी प्राकृतिक संख्याएँ अर्द्ध–समूह बनाती हैं।

(ii) How many generators of the cyclic group G of order 8 ?

ऑर्डर 8 के चक्रीय समूह G के कितने जनरेटर होते हैं ?

(iii) Find the right cosets of the subgroup $H = \{-1, 1\}$ of the group $G = \{-1, 1, i, -i\}$.

ग्रुप $G = \{-1, 1, i, -i\}$ के सबग्रुप $H = \{-1, 1\}$ के सही कोसेट (सहसमुच्चय) ज्ञात कीजिए।

(iv) If x is any element of group G, then show that $\{x^n : n \in Z\}$ is a subgroup of G.

यदि x ग्रुप G का कोई तत्त्व है, तो दर्शाइए कि $\{x^n : n \in Z\}$, G का एक उपसमूह है।

(v) An infinite cyclic group has precisely .... generators.

एक अनन्त चक्रीय समूह में ठीक .... जनरेटर होते हैं।

(vi) Find Euler's function $\phi(n)$ when $n = 6$.

यूलर का फलन $\phi(n)$ ज्ञात कीजिए जब $n = 6$।

(vii) Give an example of a ring in which a prime ideal is not a maximal ideal.

एक वलय का उदाहरण दीजिए जिसमें एक अभाज्य आदर्श अधिकतम आदर्श नहीं है।

(viii) Let I = (2), J = (12) be ideals of the ring Z of integers then find $I \cap J$.

माना कि I = (2), J = (12) पूर्णांक वलय Z के आदर्श हैं, तो $I \cap J$ ज्ञात कीजिए।

2×8=16
(2½×8=20)

Section–B (खण्ड–ब)

Unit–I

(इकाई–I)

2. (a) Show that the set Q^+ of all positive rational numbers forms an abelian group under the operation defined by :

$$a*b=\frac{ab}{2}\ \forall a,\ b\in Q^+$$

दर्शाइए कि सभी धनात्मक परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q^+ परिचालन के अन्तर्गत आबेलियन समूह बनाता है जो

$a*b=\frac{ab}{2}\ \forall a,\ b\in Q^+$ द्वारा परिभाषित है।

(b) Prove that all the matrices of the form $\begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix}$, where x is non-zero real, is a group w.r.t. matrix multiplication.

सिद्ध कीजिए कि रूप $\begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix}$ की सभी मैट्रिक्स, जहाँ x नॉन-जीरो वास्तविक है, मैट्रिक्स गुणन के सापेक्ष एक समूह है। 7,6½(10,10)

3. (a) If G is a finite group of order n then show that for any $a \in G$, $\exists$ some positive integer r, $1 \leq r \leq n$ such that $a^r = e$.

यदि G ऑर्डर n का एक परिमित समूह है, तो दर्शाइए कि किसी भी $a \in G$, $\exists$ के लिए कोई धनात्मक पूर्णांक r, $1 \leq r \leq n$ इस प्रकार है कि $a^r = e$।

(b) Show that the set G = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} is a finite abelian group of order 7 under addition modulo 7.

दर्शाइए कि सेट G = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} योग मॉडुलो 7 के तहत ऑर्डर 7 का एक परिमित आबेलियन समूह है। 7,6½(10,10)

Unit–II

(इकाई–II)

4. (a) A non-empty subset H of a group G is a subgroup iff $ab^{-1} \in H \ \forall \ a, b \in H$.

   एक समूह G का अरिक्त उपसमुच्चय H एक उपसमूह है यदि और केवल यदि $ab^{-1} \in H \ \forall \ a, b \in H$।

   (b) If H and K be any two subsets of a group G, then $(HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1}$.

   यदि H और K एक समूह G के कोई दो उपसमुच्चय हैं, तो $(HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1}$। 7,6½(10,10)

5. (a) State and prove Lagrange's theorem.

   लैग्रांज प्रमेय का वर्णन कर सिद्ध कीजिए।

   (b) Show that the group U(12) = {1, 5, 7, 11} of positive integers under multiplication modulo 12 is not a cyclic group.

   दर्शाइए कि गुणन मॉडुलो 12 के अन्तर्गत धनात्मक संख्याओं का समूह U(12) = {1, 5, 7, 11} एक चक्रीय समूह नहीं है। 7,6½(10,10)

Unit–III

(इकाई–III)

6. (a) A subgroup H of a group G is a normal subgroup of G iff $ghg^{-1} \in H$ for every $h \in H$, $g \in G$.

एक समूह G का एक उपसमूह H, G का एक सामान्य उपसमूह है यदि और केवल यदि $ghg^{-1} \in H$ प्रत्येक के लिए $h \in H$, $g \in G$।

(b) Show that a homomorphism $f : G \to G'$ is an isomorphism iff Ker $f = \{e\}$.

दर्शाइए कि एक होमोमॉर्फिज्म $f : G \to G'$ एक आइसोमॉर्फिज्म है यदि और केवल यदि Ker $f = \{e\}$।

7,6½(10,10)

7. (a) Show that the set of rational numbers Q is a ring under the composition $\oplus$ and $\odot$ defined as $a \oplus b = a + b - 1$, $a \odot b = a + b - ab$ $\forall\ a, b \in Q$.

दर्शाइए कि परिमेय संख्याओं Q का समुच्चय $a \oplus b = a + b - 1$, $a \odot b = a + b - ab$ $\forall\ a, b \in Q$ के रूप में परिभाषित संयोजन $\oplus$ तथा $\odot$ के अन्तर्गत एक वलय है।

(b) Let G be a group and $f : G \to G$ defined by $f(x) = x^n$ be an automorphism. Show for each $a \in G$, $a^{n-1} \in Z(G)$ i.e. the centre of the group. G.

माना कि $f(x) = x^n$ द्वारा परिभाषित एक समूह तथा $f : G \to G$ एक ऑटोमॉर्फिज्म है। प्रत्येक $a \in G$, $a^{n-1} \in Z(G)$ के लिए जैसे समूह G का केन्द्र दर्शाइए।

7,6½(10,10)

Unit–IV

(इकाई–IV)

8. (a) The necessary and sufficient condition for a non-empty subset S of ring R is a subring of R is that :

$$a - b \in S, ab \in S \ \forall \ a, b \in S$$

वलय R के अरिक्त उपसमुच्चय S के लिए आवश्यक और पर्याप्त शर्त R की उपवलय इस प्रकार है कि :

$$a - b \in S, ab \in S \ \forall \ a, b \in S$$

(b) Let a, b be commutative elements of a ring R of characteristic 2, show that :

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 = (a - b)^2$$

माना कि अभिलाक्षणिक 2 के वलय R के a, b विनिमेय तत्त्व हैं, दर्शाइए कि :

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 = (a - b)^2$$

7,6½(10,10)

9. (a) Define simple ring and prove that a division ring is a simple ring.

साधारण वलय को परिभाषित कीजिए और सिद्ध कीजिए कि विभाजन वलय एक साधारण वलय है।

(b) If in a ring R, $x^3 = x$ for all $x \in$ R, then show that R is a commutative.

यदि एक वलय R में $x^3 = x$ for all $x \in$ R, तो दर्शाइए कि R एक विनिमेय है। 7,6½(10,10)